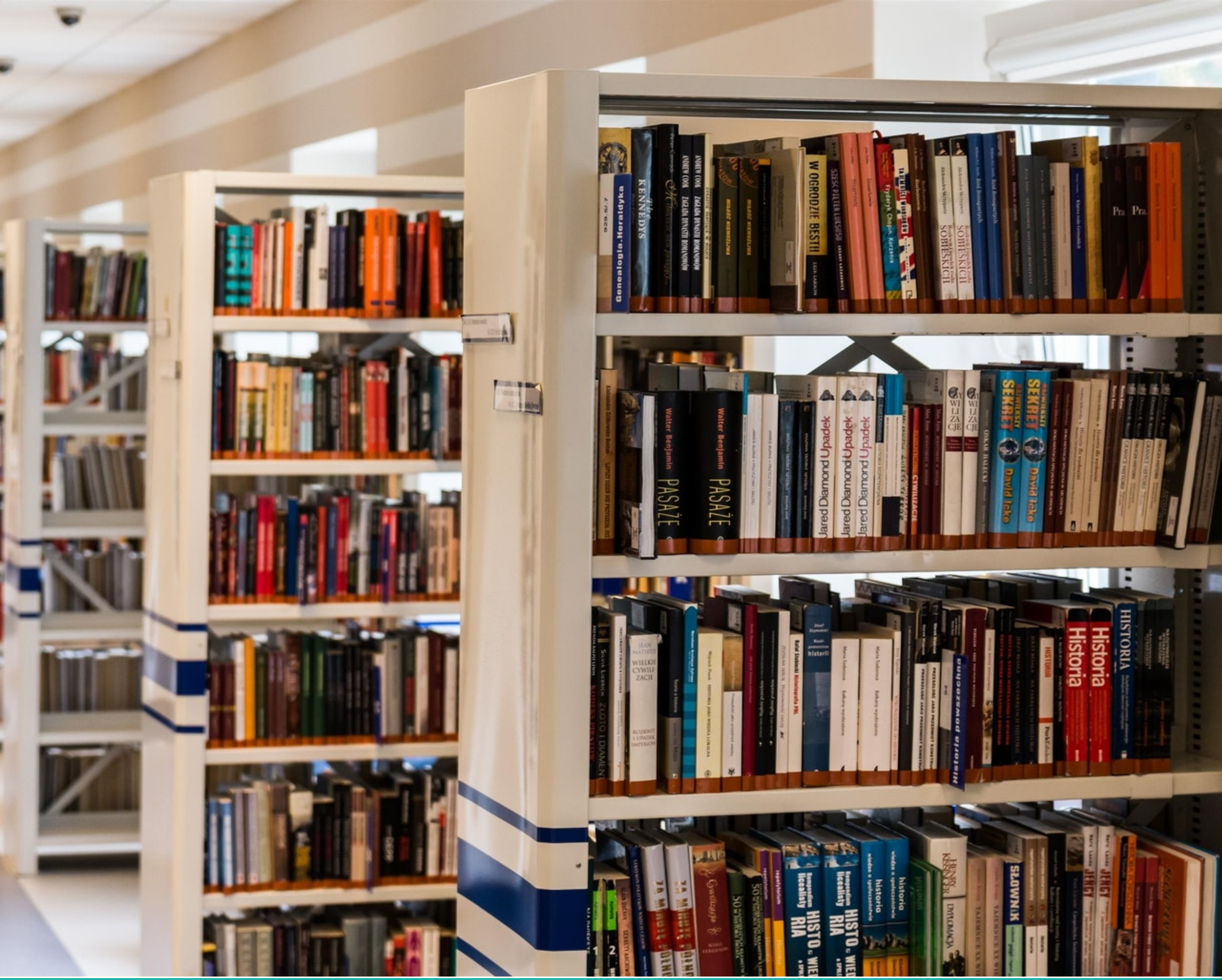

Cours d’Analyse I

Filère de Mathématques SMA1

Author: Said Hadd

Institute: Département de Mathématiques, Faculté des Sciences d’Agadir

Date: 2020/2021

Table des matières

Chapitre Sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Dans ce cours, nous traiterons les propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$. En particulier, les sous-suites, le théorème de Bolzano-Weierstrass et les suites de Cauchy.

1.1 Propriétés de la borne supéreure et inférieure

On rappelle que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des entiers naturel, $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers relatifs, tandis que le l'ensemble de nombres rationnels est :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Ainsi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. D'autre part, en raisonnant par l'absurde, on peut montrer que l'équation $x^2 = 2$ n'admet pas de solutions rationnelles. Ainsi l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas suffisant pour étudier certaines propriétés mathématiques. Il faut alors inclure dans un ensemble plus grand les éléments qui ne sont pas rationnels comme par exemple $\sqrt{2}$. Ces éléments sont appelés nombres irrationnels, leur ensemble sera noté $\mathbb{Q}^c$. On peut alors noté

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les nombres réels. L'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}^+$ (ou $[0, +\infty[$), tandis que l'ensemble des nombres négatifs par $\mathbb{R}^-$ (ou $]-\infty, 0]$). N'oubliez pas que les quantités $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres réels.

Ordre dans $\mathbb{R}$: Dans $\mathbb{R}$ on peux définir une relation d'ordre qui vérifie : pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a ($a \leq a$, réflexivité), ($a \leq b$ et $b \leq a$ implique que $a = b$, antisymétrie) et ($a \leq b$ et $b \leq c$ implique $a \leq c$, transitivité). De plus, deux nombres réels sont toujours comparables, autrement dit pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ soit $a \leq b$ ou $b \leq a$. On dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné. Si $a \leq b$ on dit que a est plus petit que b, (ou b est plus grand que a). D'autre part, si $a \leq b$ et $a \neq b$, on a on écrit $a < b$, et on dit que a est strictement inférieur à b.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ on peut trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < b$.

Definition 1.1

Un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ est dit majoré dans $\mathbb{R}$ si il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$. Dans ce cas on dit aussi que M est un majorant de A. ♣

Remarquons que si M est un majortant de A, alors tout $M < M'$ est aussi majorant de A. Donc chaque ensemble peut avoir un nombre infini de majortants. Donc le plus petit des tous les majorants c'est le plus important, il est appelé la borne supérieure de A et se note $\sup(A)$. Ainsi pour que $M = \sup(A)$ il faut et il suffit que M soit un majorant de A et que pour tout $\varepsilon > 0$ petit que soit il $M - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A. On a alors

Proposition 1.1

$$M = \sup(A) \Longleftrightarrow (x \leq M,\ \forall x \in A) \quad \textit{et} \quad (\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A :\ M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M).$$

♠

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dans cette équivalence, alors on a aussi

$$M = \sup(A) \Longleftrightarrow (x \leq M,\ \forall x \in A) \quad \text{et} \quad (\exists (x_n)_n \subset A :\ M = \lim_{n \to \infty} x_n).$$

Definition 1.2

Un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ est dit minoré dans $\mathbb{R}$ si il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq x$ pour tout $x \in A$. Dans ce cas on dit aussi que m est un minorant de A. ♣

Remarquons que si m est un minorant de A, alors tout $m' < m$ est aussi minorant de A. Donc chaque ensemble peut avoir un nombre infini de minorants. Donc le plus grand des tous les minorants c'est le plus important, il est appelé la borne inférieure de A et se note $\inf(A)$. Ainsi pour que $m = \inf(A)$ il faut et il suffit que m soit un minorant de A et que pour tout $\varepsilon > 0$ petit que soit il $m + \varepsilon$ n'est plus un minorant de A. On a alors

Proposition 1.2

$$M = \inf(A) \Longleftrightarrow (m \leq x,\ \forall x \in A) \quad \textit{et} \quad (\forall \varepsilon > 0,\ \exists y_\varepsilon \in A:\ m \leq y_\varepsilon \leq m + \varepsilon).$$ ♠

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ dans cette équivalence, alors on a aussi

$$m = \inf(A) \Longleftrightarrow (m \leq x,\ \forall x \in A) \quad \text{et} \quad (\exists (y_n)_n \subset A:\ m = \lim_{n\to\infty} x_n).$$

Il faut remarquer que $\inf(A) \leq \sup(A)$. De plus si $A \subset B$ alors $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Definition 1.3

L'ensemble A est dit borné dans $\mathbb{R}$, s'il est à la fois minoré et majoré dans $\mathbb{R}$. Ce qui est équivalent à dire que il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $-M \leq x \leq M$ pour tout $x \in A$. ♣

On a la *propriété de la borne supérieure :*

Theorem 1.1

- *Toute partie non vide majorée $A \subset \mathbb{R}$, admet une borne supérieure $\sup(A) \in \mathbb{R}$.*
- *Toute partie non vide minorée $B \subset \mathbb{R}$, admet une borne inférieure $\inf(B) \in \mathbb{R}$.* ♡

Ce résultat peut s'effondrer si nous remplaçons $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ comme indiqué dans l'exemple suivant : Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 \leq 2\}$. Cet ensemble n'est pas vide car par exemple $\frac{1}{2} \in A$. De plus, $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ est un majortant A dans $\mathbb{Q}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $M \in \mathbb{Q}$ tel que $M = \sup(A)$, donc $M < \sqrt{2}$. Maintenant d'aprés la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe $r \in \mathbb{Q}^+$ tel que $M < r < \sqrt{2}$. Mais $r^2 < 2$, donc $r \in A$ et $M < r$, ce qui est impossible car M est majorant de A. Donc A n'admet pas de borne supérieure rationnelle. Portant, $\sup(A)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A) = \sqrt{2}$ (laisser à titre d'exercice).

On a aussi les propriétés suivantes :

Theorem 1.2

$\mathbb{R}$ *est* archimédien *: Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telque $na > x$.* ♡

Démonstration Preuve : Par l'absurde on suppose que $na \leq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ce qui implique que l'ensemble $A := \{na : n \in \mathbb{N}^*\}$ est non vide et majoré par x. Donc $\sup(A)$ existe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $(n+1)a \in A$. Alors $na + a = (n+1)a \leq \sup(A)$. Ce qui donne $na \leq \sup(A) - a$. Ainsi $\sup(A) - a$ est un majorant de A, c'est contradiction avec le fait que $\sup(A) - a < \sup(A)$.

Partie entière : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. On note $n = E(x)$ ou $n = [x]$. La preuve est basée sur le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien (laisser à titre d'exercice).

1.2 Distance sur $\mathbb{R}$:

La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ est une application $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ qui est définie par

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Une definition equivalente de la valeur absolue est $|x| = \max\{x, -x\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$|x - y| \leq |x| + |y|, \qquad ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$
$$M \in \mathbb{R}^+, \ |x| \leq M \iff x \in [-M, M].$$

On appelle intervalle ouvert de centre $a \in \mathbb{R}$ et de rayon $\varepsilon > 0$ l'ensemble suivant :

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

On appelle intervalle fermé du centre $a \in \mathbb{R}$ et de rayon $\varepsilon > 0$ l'ensemble suivant :

$$[a - \varepsilon, a + \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq \varepsilon\}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \quad]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

Par définition la distance entre deux nombres réels est $d(a, b) = |a - b|$. On a alors

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c), \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.3

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

♠

Démonstration On a $x = (x - y) + y$. Donc

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. Puisque x et y sont symétriques alors on a aussi $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Ce qui implique $-|x - y| \leq |x| - |y|$. Ainsi

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

D'où le résultat.

1.3 Suites dans $\mathbb{R}$

Une suite de nombre réels est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u(n)$. On note $u_n = u(n)$ et la suite $u = (u_n)_n$.

Dans cette partie du cours, nous recherchons le comportement de u_n lorsque n est très grand. C'est la notion de limites de suites. Avant de définir ce concept mathématiques, on a les remarques suivantes :

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que "a est proche de b" si la distance $|a - b|$ est trop petite. Autrement dit si pour tout $\varepsilon > 0$ petit $|a - b| < \varepsilon$.

- Un entier $n \in \mathbb{N}$ est proche de $+\infty$ (on écrit $n \to +\infty$) s'il existe un entrier $N \in \mathbb{N}^*$ très grand tel que $n \geq N$.

Soit $(u_n)_n$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers l'infini et on écrit $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$ ou ($u_n \to \infty$ quand $n \to \infty$) si "u_n est très proche de ℓ dés que "n est proche de ∞." Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ $|u_n - \ell| < \varepsilon$ dés qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ (assez grand) tel que $n > N$. Ainsi

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Dans ce cas on dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. De plus, une suite est dite convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Example 1.1 Montrons à l'aide de la définition que $u_n = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Pourque $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ il suffit que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Si on prend, $N := E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1 \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ implique $n > \frac{1}{\varepsilon}$ implique $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. D'où le résultat.

De la même façon on a les définition suivantes :

$$+\infty = \lim_{n\to+\infty} u_n \Longleftrightarrow \forall\lambda > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N \Longrightarrow u_n > \lambda),$$

$$-\infty = \lim_{n\to+\infty} u_n \Longleftrightarrow \forall\lambda > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N \Longrightarrow u_n < -\lambda).$$

De plus on a les proriétés suivantes :

- Si une suite converge, alors sa limite est unique.
- Toute suite convergente est bornée : $\exists C > 0$ tel que pour tout n on a $|u_n| \leq C$.
- Il existe des suites qui sont bornées sont être convergentes. Par example la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée car $|u_n| = 1$, mais cette suite n'a pas de limite.
- Si $w_n \leq u_n \leq v_n$ pour tout n, et que les suites $(w_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont la même limite ℓ, alors $u_n \to \ell$ quand $n \to \infty$ (Principe des Gendarmes).
- Si $|u_n| \leq \alpha_n$ pour tout n, et $\alpha_n \to 0$ alors $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (il suffit d'appliquer le principe des gendarmes).
- Pour montrer que $u_n \to 0$, il suffit de montrer que $|u_n| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Suites monotones : Une suite $(u_n)_n$ est dite croissante si pour tout $n \geq m$ on a $u_n \geq u_m$. Ce qui est équivaut à dire que pour tout n, on a $u_{n+1} \geq u_n$. On parle de strictement croissante si l'on peut remplacer le signe $\geq$ par $>$.

Une suite $(u_n)_n$ est dite décroissante si pour tout $n \geq m$ on a $u_n \geq u_m$. Ce qui est équivaut à dire que pour tout n, on a $u_{n+1} \leq u_n$. On parle de strictement décroissante si l'on peut remplacer le signe $\geq$ par $>$ et $\leq$ par $<$.

Une suite $(u_n)_n$ est dite (strictement) monotone si elle est ou bien (strictement) croissante ou bien (strictement) décroissante.

Une suite $(u_n)_n$ est dite majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n. Elle est dite minorée s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq K$ pour tout n.

Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Proposition 1.4

On a les propriétés suivantes :

- *Si une suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée, alors elle est convergente.*

- *Si une suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, alors elle est convergente.*

Démonstration Nous allons montrer juste le premier point, l'autre est laissé en exercice. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n. On pose $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Cette ensemble est non vide et majoré, donc $\sup(A)$ existe dans $\mathbb{R}$. D'après la proriété de la borne supêrieure on a : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < u_N \leq \sup(A)$. Comme la suite est croissante, alors pour tout $n > N$ on a $\sup(A) - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \sup(A) < \sup(A) + \varepsilon$. Ce qui donne pour tout $n > N$ on a $|u_n - \sup(A)| < \varepsilon$. Ainsi $u_n \to \sup(A)$ quand $n \to \infty$.

Definition 1.4
Deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si : $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante et que $u_n - v_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

On peut montrer que cette définition implique que $u_n \leq v_n$ pour tout n.

Theorem 1.3
Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors elle converges vers la même limites. De plus $u_n \leq v_n$ pour tout n (si $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante).

Démonstration On suppose que $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante. On a alors $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Ce qui implique que $(u_n)_n$ est majorée par v_0 et que $(v_n)_n$ est minorée par u_0. Donc ils existent $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ quand $n \to \infty$. Remarquons que $\ell - \ell' = \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

Theorem 1.4
Soit $(I_n)_n$ une suite décroissante de ségment, c'est-à-dire $I_{n+1} \subset I_n$ tel que $|\sup(I_n) - \inf(I_n)| \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors il existe un seule $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{\ell\}.$$

Démonstration On pose $v_n = \sup(I_n)$ et $u_n = \inf(I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (u_n) est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante et que $u_n - v_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors ces suites sont adjacentes et donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell$ quand $n \to \infty$. De plus on a $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n, donc $\ell \in I_n$ pour tout n, ainsi $\ell \in \cap_n I_n$. Si il existe un autre élément x dans cette réunion tel que $x \neq \ell$. Par exemple $\ell < x$. Comme la suite $(v_n)_n$ est décroissante, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = \sup(I_n) \leq \ell < x$ pour tout $n \geq N$. Ce qui implique que $x \notin I_N$. C'est une contraduction. Donc $x = \ell$.

1.4 Suites de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite de Cauchy s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ dont toutes les entrées de la suite sont proches les unes des autres. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ (p > N \text{ et } q > N \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon).$$

Theorem 1.5
Une suite réelle converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration $\Longrightarrow$) Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ implique $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit maintenant $p, q > N$, donc

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui montre que $(u_n)_n$ est bien une suite de Cauchy.

$\Longleftarrow$) Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on a $|u_n - u_{N+1}| \leq 1$, donc $|u_n| \leq 1 + |u_{N+1}|$ pour tout $n > N$. On pose $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_N|, 1 + |u_{N+1}|\}$, on a alors $|u_N| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(u_n)_n$ est bornée. Soit maintenant la suite suivante

$$\beta_n = \sup_{k \geq n} u_k = \sup\{u_n, u_{n+1}, \cdots\}.$$

Il est claire que la suite $(\beta_n)_n$ est décroissante, majorée par M, donc il converge vers un $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons alors que la suite $(u_n)_n$ converge vers le même ℓ. On fait varier le $\varepsilon > 0$, et on prend $n, m > N$ tels que $u_n - \varepsilon < u_m < u_n + \varepsilon$. Cette double inégalité est vraie aussi pour tout $k \geq m$. Ainsi

$$\forall k \geq m, \qquad u_n - \varepsilon < u_k < u_n + \varepsilon.$$

En prenant le $\sup_{k \geq m}$ sur tous les cotés de cette inégalié, on trouve

$$\forall k \geq m, \qquad u_n - \varepsilon < \beta_m < u_n + \varepsilon.$$

Ensuite, en faisant $m \to +\infty$, on obtient

$$\forall k \geq m, \qquad u_n - \varepsilon < \ell < u_n + \varepsilon.$$

Ce qui donne $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Ainsi $u_n \to \ell$, quand $n \to +\infty$.

1.5 Limites supérieure et inférieure d'une suites

Soit $(u_n)_n$ une suite de réelles. On peut alors définir deux autres suites de la manière suivante :

$$\Theta_k = \sup_{n \geq k} u_n = \sup\{u_k, u_{k+1}, \cdots\},$$

$$\vartheta_k = \inf_{n \geq k} u_n = \inf\{u_k, u_{k+1}, \cdots\}.$$

Remarquons que la suite $(\Theta_k)_k$ est décroissante. Donc si la suite est minorée, alors $\Theta_k \to \inf_k(\sup_{n \geq k} u_n)$, si non $\Theta_k \to -\infty$ quand $k \to \infty$. Alors on appelle *limite supérieure* de la suite $(u_n)_n$ la quantité (appartenant à $[-\infty, +\infty]$) définie par

$$\limsup_n u_n = \lim_{k \to +\infty} \sup_{n \geq k} u_n = \inf_k(\sup_{n \geq k} u_n).$$

De même on remarque que la suite $(\vartheta_k)_k$ est croissante. Donc si la suite est majorée, alors $\vartheta_k \to \sup_N(\inf_{n \geq k} u_n)$, si non $\vartheta_k \to +\infty$ quand $k \to \infty$. Alors on appelle *limite inférieure* de la suite $(u_n)_n$ la quantité (appartenant à $[-\infty, +\infty]$) définie par

$$\liminf_n u_n = \lim_{k \to +\infty} \inf_{n \geq k} u_n = \sup_k(\inf_{n \geq k} u_n).$$

On a toujours

$$\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n.$$

En effet, on a $\inf_{n \geq k} u_n \leq u_k \leq \sup_{n \geq k} u_n)$. En suite en fait tendre k vers $+\infty$.

On remarque alors que toute suite de nombre réels admet une limite supérieure et une limite inférieure (éventuellement infinies). Le résultat suivant donne la relations entre ces deux limites et la limite classique des suites.

Proposition 1.5

Une suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n$. Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \liminf_n u_n = \limsup_n u_n.$$

♠

1.6 Bolzano-Weierstrass

Dans cette partie, nous introduisons un théorème important de l'analyse réelle

Definition 1.5

Une suite extraite (ou sous-suite) de la suite $(u_n)_n$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_n$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

♣

Il est facile de montrer (par induction) que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante alors $\varphi(n) \geq n$.

Example 1.2 les fonctions $\varphi(n) = 2n$, $\psi(n) = 2n+1$ et $\phi(n) = n^2$ sont strictement croissante. Donc $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ sont parmis les sous-suites de $(u_n)_n$. Il faut noté que chaque suite peut avoir un nombre infini de sous-suites.

Proposition 1.6

Si une suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ converge aussi vers la limite ℓ.

♠

Démonstration Par hypthèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ implique $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Mais $\varphi(n) \geq n > N$, donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Ceci implique que $u_{\varphi(n)} \to \ell$ si $n \to \infty$.

Example 1.3 La suite $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente. Cette suite admet les deus sous suites $u_{2n} = 1 \to 1$ et $u_{2n+1} = -1 \to -1$ quand $n \to \infty$, qui converges vers deux limites différentes.

Proposition 1.7

Une suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si les deux sous suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ converges vers une même limite ℓ.

♠

Démonstration En exercice.

Definition 1.6

Un réel ℓ est une valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$ si ℓ est une limite d'une sous-suite de $(u_n)_n$. On dit aussi que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une valeur d'adhérence s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

♣

Theorem 1.6

On a les proriété suivante :

- *La limite supérieure d'une suite est la plus grande de ses valeurs d'adhérence.*
- *La limite inférieure d'une suite est la plus petite de ses valeurs d'adhérence.*

♡

Démonstration En exercice.

Proposition 1.8

Pour qu'une suite $(u_n)_n$ soit convergente et faut et il suffit qu'elle admet une seule valeur d'adhérence. ♠

Démonstration D'après Proposition 1.6, si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors toutes ces sous suites converge vers ℓ. Donc ℓ est la seule valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$. Inversement si la suite $(u_n)_n$ admet une seule valeur d'adhérence, alors d'aprés Théorème 1.6 on a $\lambda = \liminf_n u_n = \limsup_n u_n$. Ainsi le résultat découle de Proposition 1.5.

Theorem 1.7 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente vers un réel. ♡

Démonstration Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n. Ce qui signifie que $-M \leq u_n \leq M$ pour tout n. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $\inf_{n\geq k} u_n \leq M$ pour tout k. Mais la suite $(\inf_{n\geq k} u_n)_k$ est croissante, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\inf_{n\geq k} u_n \to \lambda$ quand $\lambda \to \infty$. C'est à dire

$$\lambda = \liminf_n u_n.$$

D'après Théorème 1.6, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \to \lambda$ quand $n \to +\infty$.

Example 1.4 Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels telle que la suite $(|u_n|)_n$ ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ a au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration Voir solution en TD.

Chapitre Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$

2.1 Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$

Dans cette partie, nous définirons la notion d'ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$ de manière simplifiée afin d'inviter les étudiants de première année en sciences mathématiques à se familiariser avec la notion de topologie.

Un *voisinage ouvert* d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est un voisinage ouvert de 0.

Definition 2.1

Soit A et B deux sous ensembles quelconques de $\mathbb{R}$ alors on a les définitions suivantes

- *A est* ouvert *si $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset A$.*
- *B est* fermé *si son complémentaire est un ouvert de $\mathbb{R}$. Autrement dit si $B^c := \mathbb{R} \backslash B$ est un ouvert.* ♣

Remark Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors $]b, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. En effet, soient $x_0 \in]b, +\infty[$ et $\varepsilon \in]0, \frac{x_0 - b}{2}]$. Alors on a $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset]b, +\infty[$. Si $x_0 \in]-\infty, b[$, alors on choisi $\varepsilon \in]0, \frac{b - x_0}{2}]$.

Proposition 2.1

On a les propriétés suivantes :

1. *Une reunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*
2. *Une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*
3. *$\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts* ♠

Démonstration 1. Soit $(\mathscr{C}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ (ici I est un ensemble d'indice quelconque). Soit $x_0 \in \cup_{i \in I} \mathscr{C}_i$. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x_0 \in \mathscr{C}_{i_0}$. Comme $\mathscr{C}_{i_0}$ est un ouvert, alors par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset \mathscr{C}_{i_0}$. Mais $\mathscr{C}_{i_0} \subset \cup_{i \in I} \mathscr{C}_i$. Ce qui donne $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset \cup_{i \in I} \mathscr{C}_i$.
2. Soit $x \in \cap_{i=1}^{n} \mathscr{C}_i$. Alors pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ on a $x \in \mathscr{C}_i$. Il existe donc $\varepsilon_i > 0$ tel que $]x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i[\subset \mathscr{C}_i$. Pour $\varepsilon = \inf\{\varepsilon_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ on a $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathscr{C}_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. D'où le résultat.

Remark 1. Soit $b \in \mathbb{R}$. On a

$$\{b\}^c =]-\infty, b[\cup]b + \infty[.$$

C'est une reunion de deux ouverts (voir Remarque 2.1). Donc $\{b\}^c$ est un ouvert, ainsi $\{b\}$ est un fermé.
2. Une intersection infinie d'ouverts n'est forcément un ouvert. En effet, on a

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right[= \{0\}.$$

Proposition 2.2

On a les propriétés suivantes :

1. *Une intersection quelconque de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.*
2. *Une reunion finie de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.*
3. *$\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts* ♠

Démonstration Il suffit d'utiliser la Proposition 2.1.

2.2 Adhérence, intérieur, point d'accumulation

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Definition 2.2

Un point $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à A si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points adhérents à A sera noté $\overline{A}$.

♣

Proposition 2.3

On a les propriétés suivantes :

1. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Autrement dit*
$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset \mathbb{R} : F \text{ est fermé et } A \subset F\}$$
2. *Les points adhérents sont caraterisés par*
$$a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A, \quad x_n \to a, \quad n \to \infty.$$
3. *A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

♠

Démonstration 1. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. En effet, si $a \in A$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $a \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A$. Donc $A \subset \overline{A}$. Montrons que $\overline{A}$ est un fermé. Soit $x \in \overline{A}^c$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $]x-\alpha, x+\alpha[\cap A = \emptyset$. Ce qui implique que $]x-\alpha, x+\alpha[\subset \overline{A}^c$. Ainsi $\overline{A}^c$ est un ouvert, et donc $\overline{A}$ est un fermé. Montrons que c'est le plus petit qui contient A. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ tel que $A \subset F$. Montrons que $\overline{A} \subset F$. En effet, soit $x \in F^c$. Comme F^c est un ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset F^c$. Donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap F = \emptyset$. Ce qui implique $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset$. Ainsi $x \in \overline{A}^c$.
2. Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{n}$, dans la définition du point adhérent (Definition 2.2).
3. D'après (1), on a $A \subset \overline{A}$ est toujours vraie. Maintenant supposons que A est feremé. Comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, alors $\overline{A} \subset A$.

Example 2.1 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $A =]a, b[$. Alors $\overline{A} = [a, b]$. Comme $[a, b]$ est fermé et contient A, alors $\overline{A} \subset [a, b]$. Inversement montrons que $[a, b] \subset \overline{A}$. Comme $]a, b[= A \subset \overline{A}$, il suffit de montrer que $a, b \in \overline{A}$. En effet, soient $x_n = a + \frac{1}{n}$ et $y_n = b - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N = E(1/b-a) + 1$. Alors on a $(x_n)_{n>N}$ et $(y_n)_{n>N}$ sont deux suites dans A et que $x_n \to a$ et $y_n \to b$ quand $n \to \infty$. Donc, d'après Proposition 2.3, on a $a, b \in \overline{A}$. D'où le résultat.
2. On a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. En effet, d'après Proposition 2.3, il suffit de montrer que chaque $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'élément dans $\mathbb{Q}$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$ et on défini la suite $u_n = E(nx)/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il est claire que $(u_n)_n \subset \mathbb{Q}$. D'autre part, on utilisant le fait que $nx - 1 < E(nx) \leq nx$. On montre facilement que $u_n \to x$.

Definition 2.3

$a \in \mathbb{R}$ est dit point d'accumulation de A si

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset \quad \text{et} \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \{a\}.$$

L'ensemble des points d'accumulations de A sera noté A'.

♣

defn **Exercice** Montrer que A' est un fermé.

Definition 2.4

L'intérieur d'un ensemble A est le plus grand ouvert de A contenu dans A, il sera noté $\text{Int}(A)$.

Exercice Montrer que

1. $A \subset B$ implique que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $A \subset B$ implique que $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$.
3. $(\overline{A})^c = \text{Int}(A^c)$ et $(\text{Int}(A))^c = \overline{A^c}$.
4. $\overline{A \cap C} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup C} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

2.3 Ensembles compacts de $\mathbb{R}$

Comme les proriétés de $\mathbb{R}$ sont associés à la distance $d(x, y) = |x - y|$, nous allons adopter une définition simple des compacts de $\mathbb{R}$, basée sur les sous-suites (c'est la proriété de Bolzano-Weierstrass). Bien entendu il y a une autre définition plus générale, basée sur les familles d'ouverts (c'est la propriété de Borel-Lebesgue), qui est utile si on travail dans un cadre plus général que celui de $\mathbb{R}$.

Definition 2.5

Une sous ensemble $K \subset \mathbb{R}$ est dite compact si pour tout $(x_n)_n \subset K$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in K$ tel que $x_{\varphi(n)} \to \ell$.

Theorem 2.1

Dans $\mathbb{R}$, les sous ensembles compacts sont les parties fermées et bornées.

Démonstration Soit $K \subset \mathbb{R}$ une partie fermée et bornée. Soit $(x_n)_n \subset K$, alors cette suite est bornée. Donc, d'aprés le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $x_{\varphi(n)} \to \ell$. En particulier on a $\ell \in \overline{K}$. Mais K est fermée, alors $\ell \in \overline{K} = K$. Donc K est un compact. Inversement, si K n'est pas borné, alors pour tout $M > 0$, il existe $x \in K$ tel que $|x| > M$. Pour $M = 1$, il existe $x_1 \in K$ tel que $|x_1| > 1$. Pour $M = 2$, il exist $x_2 \in K$ tel que $|x_2| > 2$, ainsi de suite si $M = n$ il existe $x_n \in K$ tel que $|x_n| > n$. Donc on a construit une suite $(x_n)_n \subset K$ tel que $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$. Ainsi pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim_{n\to\infty} |x_{\varphi(n)}| = \infty$. Donc c'est le contaire de la définition des compacts. Ainsi K n'est pas compact. Si K n'est pas fermé, alors les sous-suites de K vont convergés vers des éléments dans $\overline{K} \backslash K$.

Theorem 2.2 ((propriété de Borel-Lebesgue))

$K \subset \mathbb{R}$ est compact si et seulement si pour toute famille d'ouverts $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}$ (avec I un ensemble d'indice quelconque) telle que $K \subset \cup_{i\in I} A_i$, il existe un ensemble J fini, $J \subset I$ tel que $K \subset \cup_{i\in J} A_i$.

Remark Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et F un fermé tel que $F \subset K$. Alors F est un compact. En effet, soit $(x_n)_n \subset F$, donc $(x_n)_n \subset K$. Et comme K est compact, alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \to \ell$ quand $n \to \infty$. Mais comme $(x_n)_n \subset F$, alors $\ell \in \overline{F}$. D'autre part, puisque F est fermé, on a $\overline{F} = F$, et donc $\ell \in F$. Ainsi F est un compact.

2.4 Fonctions continues et uniforméments continues

Dans cette partie nous allons étudier la classe des fonctions continues et donner leurs propriétés. Soit alors $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble.

Definition 2.6

- *Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in A$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in A$,*
$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
- *Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est continue sur A si f est continue en tout point $x_0 \in A$.*

♣

Le résultat suivant donne une caractérisation de la continuité d'une fonction en un point.

Proposition 2.4

Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ tel que $x_n \to x_0$ on a $f(x_n) \to f(x_0)$ quand $n \to \infty$.

♠

Démonstration Supposons que f est continue en x_0. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in A$,
$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
Soit $(x_n) \subset A$ tel que $x_n \to x_0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour n, $n > N$ implique $|x_n - x_0| < \alpha$. Ce qui implique que $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ainsi $f(x_n) \to f(x_0)$ quand $n \to \infty$.
Inversement, supposons que f n'est continue en x_0. Alors il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\alpha > 0$ il existe $x \in A$ tel que $|x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. En prend, $\alpha = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A$ tel que $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. comme $x_n \to x_0$, alors $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors $0 = \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Absurde.
Remark La Proposition 2.4 est très utile si on veut montrer qu'une fonction n'est pas continue comme le montre l'exemple suivant : Soit la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ définie par
$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$
Cette fonction n'est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ dans $\mathbb{R}$, ils existent deux suites $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ et $(y_n)_n \subset \mathbb{Q}^c$ telles que $x_n \to x$ et $y_n \to x$ quand $n \to +\infty$. De plus on a, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \to 0$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(y_n) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = -1 \to -1$ quand $n \to \infty$. Ainsi la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$. De la même façon on montre qu'elle n'est pas continue sur $\mathbb{Q}^c$, donc n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Definition 2.7

Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur A si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$,
$$|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

♣

On a le résultat important suivant :

Proposition 2.5

Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur A si et seulement si pour toute suites $(x_n)_n, (y_n)_n \subset A$ tels que $x_n - y_n \to 0$ on a $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. ♠

Démonstration Supposons que f est uniformément continue sur A. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$,

$$|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soient les suites $(x_n)_n, (y_n)_n \subset A$ telles que $x_n - y_n \to 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ implique que $|x_n - y_n| < \alpha$. Ce qui implique que $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Donc $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Inversement, supposons que f n'est pas uniformément continue sur A. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in A, \quad |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Soit $\alpha = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc il existent $x_n, y_n \in A$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Comme $x_n - y_n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ quand $n \to \infty$, ce qui est impossible can dans se cas on a $0 \geq \varepsilon$! !.

Remark Il est bien claire que toute fonction $f : A \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur A est continue sur A. Portant l'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre le contre exemple suivant : soit $f(x) = \sin(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le composé de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Mais elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soient les suites $x_n = \sqrt{\pi n}$ et $y_n = \sqrt{(n + \frac{1}{2})n}$. Alors, d'une part,

$$x_n - y_n = \frac{-\pi}{2\left(\sqrt{\pi n} + \sqrt{(n + \frac{1}{2})n}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, $f(x_n) - f(y_n) = (-1)^{(n+1)}$ qui n'est convergente. En conclu par l'utilisation de la Proposition 2.5.

Le résultat suivant donne une condition pour laquelle une fonction continue soit uniformément continue.

Theorem 2.3

(Théorème de Heine) : *Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur K.* ♡

Démonstration Supposons que f n'est uniformément continue sur K. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existent $x_n, y_n \in K$ tel que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Comme $(x_n) \subset K$ et K compact, alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \to \ell$ quand $n \to \infty$. Comme $x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \to 0$ quand $n \to \infty$, alora on a aussi $y_{\varphi(n)} \to \ell$ quand $n \to \infty$. Par contuité de f on a

$$\varepsilon \leq \lim_{n\to+\infty} |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| = |\ell - \ell| = 0.$$

Ce qui est absurde.

Theorem 2.4

(théorème des bornes ou théorème de Weierstrass) : *Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(K)$ est compact. De plus, il exists $a, b \in K$ tels que*

$$f(a) = \inf_{x\in K} f(x) \quad \textit{et} \quad f(b) = \sup_{x\in K} f(x).$$

♡

Démonstration Montrons que $f(K)$ est compact. Soit $(y_n)_n \subset f(K)$. Alors il existe $(x_n)_n \subset K$ telle que $y_n = f(x_n)$ pour chaque n. Comme K est compact, alors il existe $\ell \in K$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \to \ell$ quand $n \to \infty$. Or f est continue sur K, donc $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(\ell) \in f(K)$ quand $n \to \infty$. Ce qui implique que $f(K)$ est compact de $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que f atteint ces bornes. En effet, comme $f(K)$ est compact alors il est borné. Donc $\sup f(K)$ et $\inf f(K)$ existent. Alors il exists $(\alpha_n)_n \subset f(K)$ et $(\beta_n)_n \subset f(K)$ tels que $\alpha_n \to \inf f(K)$ et $\beta_n \to \sup f(K)$ quand $n \to \infty$. On peut écrire $\alpha_n = f(a_n)$ et $\beta_n = f(b_n)$ avec $(a_n)_n, (b_n)_n \subset K$. Comme K est compact, alors ils existent $a, b \in K$ et $\psi, \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes avec $a_{\psi(n)} \to a$ et $b_{\phi(n)} \to b$ quand $n \to +\infty$. Par continuity de f on a $\alpha_{\psi(n)} \to f(a)$ et $\beta_{\phi(n)} \to f(b)$. Donc on a $f(a) = \inf f(K)$ et $b = \sup f(K)$.

Une application de ce résultat est le théorème classique suivant :

Theorem 2.5

(Théorème des valeurs intermédiaires) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit λ un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = \lambda$.* ♡

Démonstration D'après le Théorème 2.4 il existe deux nombres réels $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Si λ est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $\lambda \in [m, M]$ et $f(a), f(b) \in [m, M]$. Ainsi il existe $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = \lambda$.

Example 2.2 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Démonstration Soit la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$. De plus $g(1) \leq 0 \leq g(0)$. Donc d'après le Théorème 2.5, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$. Ce qui donne $f(c) = c$.

Theorem 2.6

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$. ♡

Démonstration Soit J l'intervalle fermé de borne $f(a)$ et $f(b)$. De plus la monotonie de f implique que $f([a, b])$ est contenue dans J. Maintenant si $\lambda \in J$, alors λ est entre $f(a)$ et $f(b)$. Donc par Théorème 2.5, il existe $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = \lambda$. S'il existe un autre $v \in [a, b]$ tel que $u \neq v$ et $f(v) = \lambda$,. Comme $u \neq v$ alors par exemple $u > v$, et par la strict monotonie de f on aura $f(u) > f(v)$ ou $f(u) < f(v)$, ce qui est impossible.

2.5 Fonctions Lipschitziennes et Hölderiennes

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une fonction. Alors on a les définitions suivantes

- f est dite fonction Lipschtizienne si il existe une constant $\gamma > 0$ tel que
$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|, \qquad \forall x, y \in A.$$
Le nombre réel $\gamma > 0$ s'appelle la constante de Lipschitz de f.
- f est dite une fonction contractante (ou une contraction sur A) si f est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $\gamma \in]0, 1[$.
- Soit $\sigma \in]0, 1]$. La fonction f est dite σ-hölderienne si il existe une constant $\delta > 0$ tel que
$$|f(x) - f(y)| \leq \delta |x - y|^{\sigma}, \qquad \forall x, y \in A.$$

Proposition 2.6

Si $f : A \to \mathbb{R}$ est σ-hölderienne (en particulier Lipschitzienne) alors elle est uniformément continue sur A.

Démonstration Remarquant que une fonction 1-hölderienne c'est une fonction Lipschitzienne. Donc nous allons montrer ce résultat pour les fonctions α-hölderienne pour $\sigma \in]0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$ et on choisi $\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$. Alors pour tout $x, y \in A$ on a

$$\begin{aligned} |x-y| < \alpha &\Longrightarrow |x-y|^{\sigma} < \frac{\varepsilon}{\delta} \\ &\Longrightarrow \delta |x-y|^{\sigma} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui implique que f est uniformément continue sur A.

Example 2.3 La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ est $\frac{1}{2}$-hölderienne, donc uniformément continue sur $[0, +\infty[$. En effet, pour tout $x, y \geq 0$, on a $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq x + y$. Ainsi

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad \forall x, y \in [0, +\infty[.$$

Pour $x \geq y \geq 0$ on a $\sqrt{x} = \sqrt{(x-y)+y} \leq \sqrt{x-y} + \sqrt{y}$. Ce qui donne $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{|x-y|}$. D'autre part, par symétrie on a aussi $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y|}$. Alors

$$-\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|}, \quad \forall x, y \in [0, +\infty[.$$

Par suite

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} \quad \forall x, y \in [0, +\infty[.$$

Chapitre Dérivabilité des fonctions réelles

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 est un point à l'intérieur à I.

3.1 Fonctions dérivables

Definition 3.1

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite :

- *dérivable en x_0 si la limite*
$$\lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{3.1}$$
existe et est finie. Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et on la note par $f'(x_0)$.
- *dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on peut définir la fonction dérivée de f par $f' : I \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto f'(x)$.*

♣

La définition de la limite au point x_0 est également équivalent à l'existence de la limite suivante
$$\lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
D'autre part, comme la fonction
$$h \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
n'est pas définie en 0, alors pour montrer que la limite existe en 0 c'est mieux de calculer la limite à droit et à gauche de cette fonction au point 0. Ceci nous oblige à définir les notions de dérivées à gauche et à droit de f au point x_0. Donc si dans (3.1) on prend $h \to 0^+$ alors on parle du dérivée à droite de x_0, on note $f_d(x_0)$. Si on prend $h \to 0^-$ alors on parle du dérivée à gauche de x_0, on note $f_g(x_0)$.

Proposition 3.1

f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

♠

Notez que la continuité est une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour la dérivabilité.

Proposition 3.2

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

♠

Démonstration Il suffit d'écrire
$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0), \qquad x \neq x_0.$$
Remark La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais n'est pas déribale en 0 car on a
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$
Donc la continuité en un point n'implique pas, en général, la dérivabilité en ce point.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0. Alors $f + g$ et $f.g$ sont dérivables en x_0 et on a
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

D'autre part, si $g \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Proposition 3.3

Soit $f : I \to J$ une fontion bijective ($f(I) = J \subset \mathbb{R}$). Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et on a

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration Soit $y_0 = f(x_0)$, donc $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Soit $y \in J$, donc $y = f(x)$ avec $x \in I$ (on a aussi $x = f^{-1}(y)$). Alors

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

3.2 Dérivée et Extréma locaux

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$. On dit que a est un :

- maximum local de f sur I s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq f(a), \qquad \forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[.$$

- minimum local de f sur I s'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$f(x) \geq f(a), \qquad \forall x \in]a - \beta, a + \beta[.$$

- extermum local de f sur I si a est un maximum local ou minimum local sur I.

Proposition 3.4

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in I$ un extremum local de f sur I. Si f est dérivable en c, alors $f'(c) = 0$.

Démonstration Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que c est un maximum local. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cup]c - \alpha, c + \alpha[$ on a $f(x) \leq f(c)$. Comme f est dérivable en c, alors $f'_g(c)$ et $f'_d(c)$ existent et $f'_g(c) = f'_d(c)$. De plus on a

$$x < c \Longrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Longrightarrow f'_g(c) \geq 0,$$

$$x > c \Longrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Longrightarrow f'_d(c) \leq 0.$$

D'où $f'_g(c) = f'_d(c) = 0$. Ce qui implique que $f'(c) = 0$.

Remark La fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f'(0) = 0$. Mais 0 n'est pas un extremum de f car sur chaque voisinage de 0 on a $f(x) \geq f(0)$ si $x \geq 0$ et $f(x) \leq f(0)$ si $x \leq 0$.

3.3 Deux théorèmes classique : Rolle et Accroissements finis

Theorem 3.1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. ♡

Démonstration Si f est la fonction constant alors la peuve est évidente. Si non il va exister $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Donc on a deux situation, soit $f(x_0) > f(a)$ ou $f(x_0) < f(a)$. Supposons par exemlpe que $f(x_0) > f(a)$ (l'autre cas se démontre de la même façon). D'après le théorème des bornes (voir Chapitre II), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ (car f est continue sur le compact $[a, b]$). Alors

$$f(c) \geq f(x_0) > f(a).$$

Ceci montre que $c \neq a$, aussi $c \neq b$ vue que $f(a) = f(b)$. Donc $c \in]a, b[$. Comme c represente un maximaum pour f, alors par Proposition 3.4 on a $f'(c) = 0$.

Example 3.1 Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Comme les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont 2π–périodique alors $f(\beta) = f(\beta+2\pi)$. Ainsi par application du théorème de Rolle à f sur $[\beta, \beta + 2\pi]$ il existe au moins $c \in]\beta, \beta + 2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollary 3.1

Soit P un polynôme à coefficients rèels ayant au moins n racines réelles distincts avec $n \geq 2$. Alors son polynôme dérivé P' admet au moins $n - 1$ racines réelles distincts. ♡

Démonstration Soit $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\} \subset \mathbb{R}$ n racinces de P. On suppose que $r_1 < r_2 < \cdots < r_{n-1} < r_n$. Comme la fonction polynôme $P(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $P(r_1) = P(r_2) = \cdots = P(r_{n-1}) = P(r_n) = 0$, alors par application du théorème de Rolle à P sur chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$ pour $i = 1, 2, \cdots, n-1$, pour chaque i, il existe au moins $\alpha_i \in]r_i, r_{i+1}[$ tel que $P'(\alpha_i) = 0$. Comme les $(n - 1)$ intervalles $]r_i, r_{i+1}[$ sont disjoints, alors les α_i sont distincts.

Le résultat suivant trait le cas où $f(a) \neq f(b)$.

Theorem 3.2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

♡

Démonstration La preuve est basée sur le théorème de Rolle. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a).$$

Cette fonction est continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$. De plus on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Donc par application du théorème de Rolle à φ sur $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Comme

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall x \in]a, b[,$$

alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Voici une autre version différentielle du théorème des accroissements finis.

Theorem 3.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors pour tout $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\theta h).$$

♡

Démonstration Le cas $h = 0$ est trivial. Supposons donc que $h \neq 0$. Donc on a deux cas $h > 0$ (et donc $x_0 + h > x_0$) ou $h < 0$ (et donc $x_0 + h < x_0$). Nous supposons que $h > 0$ et appliquons le T.A.F à f sur $[x_0, x_0 + h]$, il existe donc $c \in]x_0, x_0 + h[$ tel que

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0 + h - x_0)f'(c).$$

Comme $x_0 < c < x_0+h$, alors $0 < \theta := \frac{c-x_0}{h} < 1$ et $c = x_0+\theta h$. Ainsi $f(x_0+h) = f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$.

Example 3.2 Soit $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin(0) = 0$, alors par application du théorème 3.3, pour tout $h \in \mathbb{R}$ il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\sin(h) = h\sin'(\theta h) = \cos(\theta h).$$

Ainsi

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Remark Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que il existe $\gamma > 0$ tel que $|f'(t)| \leq \gamma$ pour tout $t \in I$. Alors f est Lipschtzienne sur I, donc uniformément continue sur I. En effet, pour tout $x, y \in I$, on applique T.A.F à f sur un intervalle bornes x et y, ainsi il existe c strictement entre x et x tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. D'où

$$|f(x) - f(y)| = |f(c)||x - y| \leq \gamma|x - y|.$$

3.4 Les Formules de Taylor

Dans toute la suite I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de I.

Definition 3.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- *f est dite de classe C^1 sur I (ou continuement dérivable sur I) si f est dérivable sur I et si la fonction dérivée f' est continue sur I. Dans ce cas, on écrit $f \in C^1(I)$.*
- *Une fonction f est deux fois dérivable en x_0 si f est dérivable en tout voisinage de x_0 et la fonction dérivable définie sur ces voisiages est dérivable en x_0. La fonction f est dite deux fois dérivable sur I si f est deux fois dérivable en tout point de I. De la même façon on défini les fonction n fois dérivable.*
- *f est dite de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et que la dérivée n-ieme $f^{(n)}$ est continue sur I. Dans ce cas, on écrit $f \in C^n(I)$.*

- *f est de classe C^∞ sur I, si $f \in C^n(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas on écrit $f \in C^\infty(I)$. Ainsi*
$$C^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I).$$

♣

Dans la suite nous allons voir que les fonctions de classes C^n peuvent être approcher par des polynôme degré n.

Theorem 3.4

Soit $f \in C^n(I)$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, alors
$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + h^n \varepsilon(h), \end{aligned}$$
avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

♡

Example 3.3 La fonction exponontielle $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $f \in C^n(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($f \in C^\infty(I)$). De plus on a $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout k. Ainsi
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

Theorem 3.5

Soit $f \in C^{n+1}(I)$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

♡

Démonstration Le cas $h = 0$ est évident. Supposons que $h \neq 0$, par exemple $h > 0$. Soit la fonction
$$g(t) = f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x_0+h-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - K(x_0+h-t)^{n+1},$$
où K est un réel choisi pour que $g(x_0) = 0$. Autrement dit,
$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + Kh^{n+1}. \tag{3.2}$$
Par application du théorème de Rolle à f sur $[x_0, x_0+h]$, il existe $c \in]x_0, x_0+h[$, tel que $g'(c) = 0$. D'autre part, par un calcul simple on montre que
$$g'(t) = (x_0+h-t)^n \left((n+1)K - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \right).$$
Comme $g'(c) = 0$ et que $c \neq x_0 + h$, alors on a $(n+1)K - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} = 0$. Ainsi
$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(1+n)!}.$$
Alors d'après la relation (3.3), on a
$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(1+n)!}. \tag{3.3}$$
Comme $x_0 < c < x_0 + h$, alors $0 < \theta := \frac{c-x_0}{h} < 1$, et que $c = x_0 + \theta h$. D'où le résultat.

Bibliographie

[1] Jean-Marie Monier, Les méthodes et exercices de mathématiques MPSI, Dunod, 2011.