UNIVERSITE IBN ZOHR

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques

AGADIR

Corrections des Examens d'Analyse

SMA1-SMI1

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$
$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$$
$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Années Universitaires 2018–2021

Prof. Said Hadd

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Filière SMA1-SMI1

Université Ibn Zohr, Agadir
A.U. 2018/2019

Examen d'Analyse 1: Session normale

(26 Décembre 2018, Durée 1h30)

Exercice I : Soient $a > 0$ un nombre réel et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, +\infty[$ telle que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Soit $b \geq a$ un réel arbitraire.

(1) Montrer que pour tout $x > b$ il existe $c_x \in]b, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c_x)\frac{x-b}{x} + \frac{f(b)}{x}.$$

(2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $B > 0$ tel que pour tout $x > B$ on a

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon.$$

(Indication: utiliser la définition de la limite $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. De plus comme b est arbitraire dans la question (1) vous pouvez le choisir convenablement.)

(3) Que peut on conclure ?.

Exercice II: Les deux parties suivantes sont indépendantes:

(A) Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ la fonction continue vérifiant

$$|g(t) - g(s)| < |t - s|, \qquad \forall t, s \in [a, b],\ t \neq s.$$

(A-1) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in [a, b]$ solution de l'équation $g(x) = x$.

(A-2) Soit la suite récurrente $v_0 \in [a, b]$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ pout tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(|v_n - \lambda|)_{n\geq 0}$ est monotone et est convergente vers une limite μ.

(A-3) Montrer qu'il existe une sous-suite $(v_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que $v_{\varphi(n)} \to \rho$ avec $\rho = \lambda + \mu$ ou $\rho = \lambda - \mu$.

(A-4) Dans cette question on suppose que $\rho = \mu + \lambda$. En utilisant la question (A-1), montrer que $\mu = 0$ et que $v_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$.

(B) Soient $\beta, \kappa \in]0, +\infty[$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$|\psi(t) - \psi(s)| \leq k\ |t - s|^{\beta}, \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}. \qquad (H_\beta)$$

(B-1) Montrer que ψ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $|\psi(t)| \leq C + \kappa|t|^{\beta}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(B-2) Dans cette question on suppose que $\beta > 1$. Montrer que ψ est identiquement nulle (Indication: il suffit de montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\psi'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

(B-3) Soit $\beta \in]0, 1]$ et ψ une fonction vérifiant (H_β). Montrer que la fonction $t \mapsto \sin(t)$ vérifie la condition (H_1) (dans le cas $\beta = 1$) avec $\kappa = 1$. De plus, montrer que la fonction $h(t) = \sin(\psi(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$ vérifie la condition (H_β).

(B-4) Montrer que la fonction $t \ni \mathbb{R} \mapsto \sin(\sqrt{|t|})$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (Indication: utiliser les questions (B-1) et (B-3).)

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Filière SMA1-SMI1

Université Ibn Zohr, Agadir
A.U. 2018/2019
Hadd

Correction détaillée de l' Examen d'Analyse 1

(Session normale, décembre 2018)

Exercice I : Soient $a > 0$ un nombre réel et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, +\infty[$ telle que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Soit $b \geq a$ un réel arbitraire.

(1) Montrer que pour tout $x > b$ il existe $c_x \in]b, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c_x)\frac{x-b}{x} + \frac{f(b)}{x}.$$

Démonstration. Soit $x > b$ fixé. Comme f est dérivable sur $[b, x]$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]b, x[$ tel que

$$f(x) - f(b) = f'(c_x)(x - b).$$

Comme $x \neq 0$ (car $b > 0$), alors on peux déviser par x dans l'inégalité en haut on a

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c_x)\frac{x-b}{x} + \frac{f(b)}{x}.$$

□

(2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $B > 0$ tel que pour tout $x > B$ on a

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon.$$

(Indication : utiliser la définition de la limite $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. De plus comme b est arbitraire dans la question (1) vous pouvez le choisir convenablement.)

Démonstration. D'après (1), pour tout $b \geq a$ pour tout $x > b$ on a

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |f'(c_x)| + \frac{|f(b)|}{x}. \qquad (\star)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Le fait que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ implique qu'il existe $b_1 > 0$ tel que $|f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dés que $x > b_1$. D'autre part, d'après (1) et $(\star)$ il existe $c_x > b_1$ tel que

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |f'(c_x)| + \frac{|f(b_1)|}{x}.$$

Comme $c_x > b_1$ alors $|f'(c_x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'où

$$x > b_1 \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(b_1)|}{x}. \qquad \text{(E1)}$$

Il existe $b_2 > 0$ tel que

$$x > b_2 \Longrightarrow \frac{|f(b_1)|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \text{(E2)}$$

Soit $B := \max\{b_1, b_2\}$. Alors d'après (E1) et (E2) on a

$$x > B \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon.$$

$\square$

(3) Que peut on conclure ?.

Démonstration. L'assertion dans (2) implique que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$\square$

Exercice II : Les deux parties suivantes sont indépendantes :

(A) Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ la fonction continue vérifiant

$$|g(t) - g(s)| < |t - s|, \qquad \forall t, s \in [a, b],\ t \neq s.$$

(A-1) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in [a, b]$ solution de l'équation $g(x) = x$.

Démonstration. Soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(t) = g(t) - t$. Comme g est continue sur $[a, b]$, alors h est continue sur $[a, b]$. Puisque $g([a, b]) \subset [a, b]$ alors $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$. Maintenant, par application du théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins $\lambda \in [a, b]$ tel que $h(\lambda) = 0$, et donc $g(\lambda) = \lambda$. Supposons qu'il existe un autre $\lambda' \in [a, b]$ tel que $\lambda' \neq \lambda$ et $g(\lambda') = \lambda'$. Alors par l'inégalité en haut, on a

$$|\lambda - \lambda'| = |g(\lambda) - g(\lambda')| < |\lambda - \lambda'|.$$

Absurde. Donc $\lambda = \lambda'$, c'est l'unicité ! ! $\square$

(A-2) Soit la suite récurrente $v_0 \in [a, b]$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ pout tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(|v_n - \lambda|)_{n \geq 0}$ est monotone et est convergente vers une limite μ.

Démonstration. Comme $g(\lambda) = \lambda$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|v_{n+1} - \lambda| = |g(v_n) - g(\lambda)| < |v_n - \lambda|.$$

Ce qui montre que la suite $(|v_n - \lambda|)_{n \geq 0}$ est (strictement) décroissante. Comme les termes de cette suite sont tous positifs, alors la suite est minorée par 0 et donc elle est convergente. Il existe donc un réel $\mu \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} |v_n - \lambda| = \mu. \tag{Σ}$$

$\square$

(A-3) Montrer qu'il existe une sous-suite $(v_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ telle que $v_{\varphi(n)} \to \rho$ avec $\rho = \lambda + \mu$ ou $\rho = \lambda - \mu$.

Démonstration. Ici sans aucun doute il faut penser au Théorème de Bolzano-Weierstrass (et oui c'est le programme de SM!!!). Ce théorème dit que de toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ on peux extraire une sous-suite convergente. Pour réponde à la question, il suffit alors de montrer que la suite $(v_n)_n$ est bornée. En effet, la suite $(|v_n - \lambda|)_{n\geq 0}$ est bornée car elle est convergente (voir votre cours). Et donc il existe $M > 0$ tel que $|v_n - \lambda| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, l'inégalité triangulaire donne

$$|v_n| = |(v_n - \lambda) + \lambda| \leq |v_n - \lambda| + |\lambda| \leq M + |\lambda|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(v_n)_n$ est donc bornée, elle admet alors une sous-suite $(v_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un réel $\rho \in \mathbb{R}$.
De plus on a $|v_{\varphi(n)} - \lambda| \to |\rho - \lambda|$ quand $n \to +\infty$ (car la fonction valeur absolue $t \mapsto |t|$ est continue sur $\mathbb{R}$). D'après (Σ) on a alors $|\rho - \lambda| = \mu$. Ceci implique $\rho - \lambda = \pm\mu$. □

(A-4) Dans cette question on suppose que $\rho = \mu + \lambda$. En utilisant la question (A-1), montrer que $\mu = 0$ et que $v_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration. On a $v_{\varphi(n)} \to \rho$ quand $n \to +\infty$. Comme g est continue alors $v_{\varphi(n)+1} = g(v_{\varphi(n)}) \to g(\rho)$ quand $n \to +\infty$. D'après (Σ) on a $|g(\rho) - \lambda| = \mu$. Maintenant, le point (A-1) implique

$$\mu = |g(\rho) - \lambda| = |g(\rho) - g(\lambda)| < |\rho - \lambda| = |\mu|.$$

Comme $|\mu| = \max\{\mu, -\mu\}$, alors $|\mu| = -\mu$ est donc $\mu \leq 0$. Mais déjà on sait que $\mu \geq 0$, car c'est la limite d'une suite de termes positifs. Ainsi $\mu = 0$. On a donc $|v_n - \lambda| \to \mu = 0$ quand $n \to +\infty$. En utilisant la définition de la limite d'une suite qui tend vers zéro, on trouve $v_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$. □

(B) Soient $\beta, \kappa \in]0, +\infty[$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$|\psi(t) - \psi(s)| \leq \kappa\, |t - s|^\beta, \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}. \tag{H_β}$$

(B-1) Montrer que ψ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $|\psi(t)| \leq C + \kappa|t|^\beta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour montrer que ψ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il faut se donner un $\varepsilon > 0$ (arbitraire) et essayer de trouver (construire) un réel $\alpha > 0$ (qui dépend bien sûr de ε) tel que pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ avec $|t - s| < \alpha$ alors $|\psi(t) - \psi(s)| < \varepsilon$. Vue la forme de l'inégalié (H_β), il suffit de choisir $\alpha := (\frac{\varepsilon}{\kappa})^{\frac{1}{\beta}}$. Donc pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ tel que $|t - s| < \alpha$ on a $\kappa\, |t - s|^\beta < \varepsilon$, et par suite $|\psi(t) - \psi(s)| < \varepsilon$. C'est l'uniforme continuité de ψ.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|\psi(t)| = |\psi(0) + \psi(t) - \psi(0)| \leq |\psi(0)| + |\psi(t) - \psi(0)| \leq |\psi(0)| + \kappa|t|^\beta.$$

Il suffit donc de poser $C := |\psi(0)|$. □

(B-2) Dans cette question on suppose que $\beta > 1$. Montrer que ψ est identiquement nulle si et seulement si elle s'annule en un point de $\mathbb{R}$ (Indication : il suffit de montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\psi'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

Démonstration. Montrons que ψ est dérivable et que sa fonction dérivée ψ' est identiquement nulle. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Comme $\beta > 1$, alors on peut écrire $\beta = 1+\sigma$ avec $\sigma > 0$ (il suffit de prendre $\sigma := \beta - 1 > 0$). Pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec $s \neq t$ on a

$$\left| \frac{\psi(s) - \psi(t)}{s - t} \right| \leq \kappa |s - t|^{\sigma}.$$

Comme $\kappa|s - t|^{\sigma} \to 0$ quand $s \to t$, alors

$$\lim_{s \to t} \frac{\psi(s) - \psi(t)}{s - t} = 0.$$

Ce qui implique que ψ est dérivable en t et que $\psi'(t) = 0$. Comme t est arbitraire, alors $\psi' \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. $\square$

(B-3) Soit $\beta \in]0, 1]$ et ψ une fonction vérifiant (H_β). Montrer que la fonction $t \mapsto \sin(t)$ vérifie la condition (H_1) (dans le cas $\beta = 1$) avec $\kappa = 1$. De plus, montrer que la fonction $h(t) = \sin(\psi(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$ vérifie la condition (H_β).

Démonstration. Montrons que la fonction sinus satisfait la condition (H_1) pour un $\kappa = 1$. En effet, la fonction sinus est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et donc par application du Théorème des accroissements finis à la fonction sinus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ il existe une constant c entre x et y telle que $\sin(x) - \sin(y) = \cos(c)(x - y)$. Comme $|\cos(c)| \leq 1$, alors en passant à la valeur absolue, on a

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, soit une fonction ψ qui satisfait (H_β). Alors pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sin(\psi(t)) - \sin(\psi(s))| \leq |\psi(t) - \psi(s)| \leq \kappa |t - s|^{\beta}.$$

Donc la fonction $t \mapsto \sin(\psi(t))$ satisfait aussi la condition (H_β). $\square$

(B-4) Montrer que la fonction $t \ni \mathbb{R} \mapsto \sin(\sqrt{|t|})$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (Indication : utiliser les questions (B-1) et (B-3).)

Démonstration. Tout d'abord il faut remarquer que pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ on a

$$\left| \sin(\sqrt{|t|}) - \sin(\sqrt{|s|}) \right| \leq \left| \sqrt{|t|} - \sqrt{|s|} \right|.$$

Il suffit donc de montrer que la fonction racine carrée $t \mapsto \sqrt{|t|}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il suffit donc d'aprés le point (B-1) que la fonction racine carrée satisfait la condition (H_β) pour des constantes κ et β bien appropriés. Dans un premier temps soit $h \geq 0$ et $s \in \mathbb{R}$. on a $(\sqrt{h} + \sqrt{|s|})^2 \geq h + |s|$. Comme la fonction racine carrée est croissante, alors on a $\sqrt{h} + \sqrt{|s|} \geq \sqrt{h + |s|}$. Ce qui donne

$$0 \leq \sqrt{h + |s|} - \sqrt{|s|} \leq \sqrt{h}.$$

Une autre remarque c'est que les nombres réels t et s jouent le même rôle (ils sont symétriques), donc on peut, sans perdre de généralités, supposer que $|t| \geq |s|$. Donc avec cette supposition et si en choisit $h = |t| - |s| \geq 0$, on trouve

$$0 \leq \sqrt{|t|} - \sqrt{|s|} \leq \sqrt{|t| - |s|}.$$

Mais on sait que $|t| - |s| = ||t| - |s|| \leq |t - s|$, et donc $\sqrt{|t| - |s|} \leq \sqrt{|t - s|}$. D'où

$$0 \leq \sqrt{|t|} - \sqrt{|s|} \leq |t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$\left|\sin(\sqrt{|t|}) - \sin(\sqrt{|s|})\right| \leq |t - s|^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

D'où le résultat, d'après (B-1). $\square$

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2019-2020
25 Décembre 2019

Examen (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Durée 1h30

Exercice 1.

I) Soit φ une fonction numérique définie sur $[0,1]$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en fonction de son premier terme $u_0 \in [0,1]$ par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k\,|x-y|, \qquad (x,y) \in [0,1]^2.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\, |u_1 - u_0|$.
2) Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ on a $|u_{n+p} - u_n| \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, |u_1 - u_0|$.
3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
4) Montrer que φ est continue et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $l \in [0,1]$ où $\varphi(l) = l$.

II) Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$ telle que $|\, f'(x)\, | \leq x$ pour tout $x \in]0,1[$. On se propose de montrer que f est prolongeable par continuité en 0^+. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $]0,1[$ qui converge vers 0.

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 \in [0,1]$ par $v_{n+1} = f(v_n)$ est de Cauchy.

2) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3) Etablir le prolongement par continuité de f.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et la relation de récurrence :

$u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Où f est définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{2}$ si $x > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

1. Soit la fonction h définie sur $[0;1]$ par $h(x) = f(x) - x$. Calculer h' sur $[0;1]$ et h'' sur $]0;1]$.

2. En déduire le sens des variations de h' puis celles de h.

3. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0;1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in [0,1]$.

5. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N};\ |\, u_{n+1} - \alpha\, | \leq \dfrac{2}{e}\ |\, u_n - \alpha\, |$.

6. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = 1$ et

$$\forall x > 0,\ f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f(x)g(x) \text{ avec } g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

2. Démontrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire la monotonie de f.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t+1)}{\ln(t)}$ =1 et en déduire que f est continue en 0.

5. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

6. Montrer qu'il existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $[a, b]$, vérifiant :

$$\forall x \neq y \in [a, b],\ \mid f(x) - f(y) \mid < k \mid x^3 - y^3 \mid \quad \text{où } k > 0.$$

1. Montrer que f est uniformément continue.

2. On définit la fonction g sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - kx^3$. Montrer que g est stictement monotone.

3. On suppose dans la suite que

$$\forall x \in [a, b], \quad ka^3 \leq f(x) \leq kb^3.$$

En déduire qu'il existe un unique nombre s de $[a, b]$ tel que $g(s) = 0$.

4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $x_0 = a$ et $x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{k}f(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n =\mid x_n^3 - s^3 \mid$ est convergente vers un nombre d.

5. Dédiure qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sqrt[3]{s3 \pm d}$

6. Montrer que $f(\sqrt[3]{s^3 \pm d})$ prend une des valeurs $k(s^3 - d)$ ou $k(s^3 + d)$.

7. En déduire que $d = 0$. (raisonner par l'absurde)

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2019-2020
25 Décembre 2019

Corrigé de l'examen (Module Analyse 1)
–Section (SM1)–

Durée 1h30

Exercice 1.

Soit φ une fonction numérique définie sur $[0,1]$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en fonction de son premier terme $u_0 \in [0,1]$ par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k\,|x-y|, \qquad (x,y) \in [0,1]^2.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\ |u_1 - u_0|$.
2) Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ on a $|u_{n+p} - u_n| \leq \dfrac{k^n}{1-k}\ |u_1 - u_0|$.
3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
4) Montrer que φ est continue et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $l \in [0,1]$ où $\varphi(l) = l$.

Solution :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - u_n| = |\varphi(u_n) - \varphi(u_{n-1})| \leq k\,|u_n - u_{n-1}|$, en réitérant cet inégalité on obtient $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\ |u_1 - u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$|u_{n+p} - u_n| = |u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_{n+p-1} - u_{n+p-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n+1} - u_n|.$$

De l'inégalité triangulaire on obtient :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \ldots\ldots\ldots\ldots + |u_{n+1} - u_n|$$

D'après ce qui précède on en déduit que

$$|u_{n+p} - u_n| \leq k^{n+p-1}\,|u_1 - u_0| + k^{n+p-2}\,|u_1 - u_0| + \ldots\ldots\ldots + k^n\,|u_1 - u_0|,$$

or

$$k^{n+p-1}\,|u_1 - u_0| + k^{n+p-2}\,|u_1 - u_0| + \ldots\ldots\ldots + k^n\,|u_1 - u_0| = k^n \frac{1-k^p}{1-k}\,|u_1 - u_0|.$$

On en déduit que

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$$

3) Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on a $|u_{n+p} - u_n| \leq \dfrac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$ $|u_{n+p} - u_n| \leq \dfrac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$ et du fait que $k^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

4) Le fait que la fonction φ vérifie l'inégalité $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k |x - y|$, $\quad (x, y) \in [0, 1]^2$, donc φ est continue sur $[0, 1]$ et de plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $l \in [0, 1]$ où $\varphi(l) = l$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et la relation de récurrence :

$u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Où f est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{2}$ si $x > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

1. Soit la fonction h définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = f(x) - x$. Calculer h' sur $[0; 1]$ et h'' sur $]0; 1]$.

2. En déduire le sens des variations de h' puis celles de h.

3. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0; 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in [0, 1]$.

5. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \dfrac{2}{e} \mid u_n - \alpha \mid$.

6. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Solution :

1. La dérivée h' sur $]0; 1]$ est égale à $h'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(1 + \dfrac{1}{x}) - 1$ et

$$h'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - x - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-\frac{1}{x}} - x}{x} = -1.$$

Donc $h'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(1 + \dfrac{1}{x}) - 1$ sur $[0; 1]$. La dérivée second $h^{"}$ sur $]0; 1]$ est égale à $h"(x) = \dfrac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$.

2. La fonction $h"$ est positive sur $]0; 1]$, donc la dérivée h' est croissante sur $[0; 1]$, il s'ensuit que $h'(0) \leq h'(x) \leq h'(1) = \dfrac{2}{e} - 1 \leq 0$. Donc la fonction h est décroissante sur $[0; 1]$.

3. On a $h(0) \times h(1) < 0$ et comme h est continue et décroissante sur $[0; 1]$, d'après le TVI 'il existe un unique $\alpha \in [0; 1]$ tel que $h(\alpha) = 0$, donc $f(\alpha) = \alpha$.

4. On a $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et supposons que $u_n \in [0, 1]$. Montrons que $u_{n+1} \in [0, 1]$, en effet puisque la fonction f est croissante sur $[0; 1]$, donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [f(0); f(1)] = [\frac{1}{2}; \frac{1}{e} + \frac{1}{2}] \subset [0, 1].$$

5. La fonction f étant continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$ et que $f"(x) = \dfrac{1}{x^3} e^{-\dfrac{1}{x}} \geq 0$ sur $]0; 1]$, donc $0 \leq f'x) = e^{-\dfrac{1}{x}}(1+\frac{1}{x}) \leq f'(1) = \dfrac{2}{e}$ pour $x \in]0, 1]$. D'après le TAF on a : $\mid f(x) - \alpha \mid \leq \dfrac{2}{e} \mid x - \alpha \mid$ pour tout $x \in]0, 1]$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}; \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{2}{e} \mid u_n - \alpha \mid .$$

6. De l'inégalité précédant on a $\forall n \in \mathbb{N}; \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^{n+1} \mid u_0 - \alpha \mid$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = 1$ et

$$\forall x > 0, \;\; f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, \;\; f'(x) = f(x) g(x) \;\; \text{avec} \;\; g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

2. Démontrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire la monotonie de f.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t+1)}{\ln(t)}$ =1 et en déduire que f est continue en 0.

5. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

6. Montrer qu'il existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Solution :

1. La fonction f est bien dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$f'(x) = \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = f(x)\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right) = f(x)\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$$

2. En appliquant le TAF au logarithme entre x et $x+1$, on obtient $\ln(x+1) - \ln(x) = \dfrac{1}{c}$, où c compris entre x et $x+1$. D'où on a :

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

3. La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

4. La limite $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t+1)}{\ln(t)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)+\ln(1+\frac{1}{t})}{\ln(t)} = 1 + \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\ln(t)} = 1$. Donc d'après ce que précède on a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$, on pose $\frac{1}{x} = t$ donc

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right) = 1$$

or $f(0) = 1$, donc f est continue en 0.

5. La dérivée de f lorsqu'elle existe est égale à

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \left(t\exp\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right) - t\right) = \lim_{t\to+\infty} \ln(t+1) = +\infty,$$

donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

6. On pose $g(x) = f(x) - x$ et on a $g(0) = 1$ et $g(4) = \left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 - 4 < 0$, d'après le TVI il existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donc $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, vérifiant :

$$\forall x \neq y \in [a,b], \quad | f(x) - f(y) | < k \mid x^3 - y^3 \mid \quad \text{où} \quad k > 0.(*)$$

1. Montrer que f est uniformément continue.

2. On définit la fonction g sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - kx^3$. Montrer que g est strictement décroissante.

3. On suppose dans la suite que

$$\forall x \in [a,b], \quad ka^3 \leq f(x) \leq kb^3.$$

En déduire qu'il existe un unique nombre s de $[a,b]$ tel que $g(s) = 0$.

4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $x_0 = a$ et $x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{k}f(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mid x_n^3 - s^3 \mid$ est convergente vers un nombre $d \geq 0$.

5. Déduire qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sqrt[3]{s^3 \pm d}$

6. Montrer que $f(\sqrt[3]{s^3 \pm d})$ prend une des valeurs $k(s^3-d)$ ou $k(s^3+d)$.

7. En déduire que $d = 0$. (raisonner par l'absurde)

Solution :

1. On a $\mid f(x)-f(y)\mid < k \mid x^3-y^3\mid$ où $k>0$ pour tout $x,y\in[a,b]$, donc $\mid f(x)-f(y)\mid < k \mid x-y\mid\mid x^2+xy+y^2\mid$. L'expression x^2+xy+y^2 est bornée pour tout $x,y\in[a,b]$, il existe donc $M>0$ tel que pour tout $x,y\in[a,b]$, donc $\mid f(x)-f(y)\mid < kM\mid x-y\mid$. Ceci implique que f est uniformément continue sur $[a,b]$.

2. Si $g(x)=f(x)-kx^3$. Alors

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)-k(x^3-y^3)}{x-y}.$$

D'après (*) on a $-k(x^3-y^3)<f(x)-f(y)<k(x^3-y^3)$, donc pour $x<y$

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)-k(x^3-y^3)}{x-y}\leq 0$$

Donc g est bien strictement décroissante sur $[a,b]$.

3. Le fait que $\forall x\in[a,b],\quad ka^3\leq f(x)\leq kb^3$, entraine que $g(a)=f(a)-ka^3\geq 0$ et $g(b)=f(b)-kb^3\leq 0$.La fonction g est continue et stictement décroissante sur $[a,b]$, d'après le TVI il existe un unique nombre s de $[a,b]$ tel que $g(s)=0$.

4. La suite $u_n=\mid x_n^3-s^3\mid$ avec $x_{n+1}=\sqrt[3]{\frac{1}{k}f(x_n)}$. $u_{n+1}=\mid x_{n+1}^3-s^3\mid=\mid \dfrac{1}{k}f(x_n)-\dfrac{1}{k}f(s)\mid$. D'après (*) on a $\mid \frac{1}{k}f(x_n)-\frac{1}{k}f(s)\mid<\mid x_n^3-s^3\mid=u_n$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle converge vers un certain nombre d.

5. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée et par suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée. D'après Bolzano-Weirestrass il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain nombre c, or $u_{\varphi(n)}=\mid x_{\varphi(n)}^3-s^3\mid$, donc par passage à la limite on obtient $d=\mid c^3-s^3\mid\Longrightarrow c=\sqrt[3]{s^3\pm d}$.

6. On a $u_{\varphi(n+1)}=\mid x_{\varphi(n+1)}^3-s^3\mid=\mid \dfrac{1}{k}f(x_{\varphi(n)})-\dfrac{1}{k}f(s)\mid\to\mid\dfrac{1}{k}f(c)-\dfrac{1}{k}f(s)\mid$ et $u_{\varphi(n+1)}\to d$, donc $d=\mid\dfrac{1}{k}f(c)-\dfrac{1}{k}f(s)\mid=\mid\dfrac{1}{k}f(c)-s^3\mid$.

D'où $f(c)=k(s^3\pm d)$.

7. Supposons que $d\neq 0$, vu que $f(s)=ks^3$, de (*) on en déduit que $d=\mid\frac{1}{k}f(c)-\frac{1}{k}f(s)\mid<\mid c^3-s^3\mid=\mid s^3\pm d-s^3\mid=d$. Absurde donc $d=0$.

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021
Mercredi 7 avril 2021

Examen Rattrapage (Module Analyse 1)
–Section (SMA1&SMI1)–

Question de cours.
1) Enoncer le Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).
2) Enoncer le Théorème des accroissements finis (TAF).

Problème. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction numérique. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que si f est continue, alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et aussi $f \circ f(\alpha) = \alpha$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a \leq u_n \leq b$.

3) On suppose que f est décroissante sur $[a, b]$, on pose :

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Vérifier que $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$ et $w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)$.

b) Vérifier que $f \circ f$ est croissante sur $[a, b]$ et en déduire les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et qu'elles convergent.

c) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

d) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si f est continue sur $[a, b]$, alors $f(l) = l$.

4) *Application* : Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$ est convergente et déterminer sa limite.

5) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$, où $a > 0$.
Montrer à l'aide du TAF que pour tout $x, y \in]\sqrt{a}, +\infty[$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$.

6) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 > \sqrt{a}$.

a) Vérifier que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ et en déduire que $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{a}\right|$.

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021
Mercredi 7 avril 2021

Examen Rattrapage (Module Analyse 1)
–Section (SMA1&SMI1)–

Question de cours.
1) Enoncer le Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).
2) Enoncer le Théorème des accroissements finis (TAF).

Exercice 1. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction numérique. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que si f est continue, alors il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et aussi $f \circ f(\alpha) = \alpha$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a \leq u_n \leq b$.

3) On suppose que f est décroissante sur $[a,b]$, on pose :

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Vérifier que $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$ et $w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)$.

b) Vérifier que $f \circ f$ est croissante sur $[a,b]$ et en déduire les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et qu'elles convergent.

c) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

d) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si f est continue sur $[a,b]$, alors $f(l) = l$.

4) *Application* : Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$ est convergente et déterminer sa limite.

5) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$, où $a > 0$.
Montrer à l'aide du TAF que pour tout $x, y \in]\sqrt{a}, +\infty[$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x-y|$.

6) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 > \sqrt{a}$.

a) Vérifier que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ et en déduire que $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{a}\right|$.

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Solution.

Question de cours.

1) Théorème des valeurs intermédiaires(TVI): Si f une fonction continue sur $[a,b]$ et que $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

2) Théorème des accroissements finis (TAF): Soit f une fonction continue de $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Exercice 1.

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Si f est une fonction continue de $[a,b]$ à valeur dans $[a,b]$. On pose $g(x) := f(x) - x$, donc g est une fonction continue sur $[a,b]$ et que $g(a) = f(a) - a \geq 0, g(b) = f(b) - b \leq 0$. Par le (TVI) il existe un point $\alpha \in [a,b]$ tel que $g(\alpha) = 0$, donc $f(\alpha) = \alpha$.

2) On montre par réccurence sur $n \in \mathbb{N}$ que $a \leq u_n \leq b$. C'est vrai pour $n = 0$, on suppose que $a \leq u_n \leq b$. Comme $f : [a,b] \to [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $a \leq u_{n+1} \leq b$.

3) On suppose que f est décroissante sur $[a,b]$, on pose :

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

a) Si f est décroissante sur $[a,b]$ à valeur dans $[a,b]$, alors $f \circ f$ est croissante sur $[a,b]$. Autrement dit, pour tout $x, y \in [a,b]$ $(x \neq y)$ on a $\dfrac{f \circ f'x) - f \circ f(y)}{x - y} \geq 0$, b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α et comme $u_n \in [a,b]$. Donc $\alpha \in [a,b]$ car celui-ci est fermé.

b) De a) on a $\dfrac{v_{n+1} - v_n}{v_n - v_{n-1}} \geq 0$ ceci veut dire que $v_{n+1} - v_n$ et $v_n - v_{n-1}$ ont le même signe, il s'en suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} - v_n$ à le même signe que $\nu_1 - \nu_0$. On en déduit que si $\nu_1 \leq \nu_0$, alors la suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si $\nu_0 \leq \nu_1$, alors la suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Meme raisonnement pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant monotones et bornées par a et b, donc elles convergent.

c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon \text{ on a } \mid v_n - l \mid < \varepsilon \text{ et } \mid w_n - l \mid < \varepsilon \qquad (*)$$

. On pose $M_\varepsilon = 2N_\varepsilon + 2$, donc $\forall n \geq M_\varepsilon$ on a deux cas

<u>1er cas</u> si n est pair, alors $n = 2p$ où $p \geq N_\varepsilon + 1 \geq N_\varepsilon$, donc d'après $(*)$ on a$\mid u_n - l \mid = \mid u_{2p} - l \mid = \mid v_p - l \mid < \varepsilon$

<u>2eme cas</u> si n est impair, alors $n = 2p+1$ où $p \geq N_\varepsilon + 1 \geq N_\varepsilon$, donc d'après $(*)$ on a$\mid u_n - l \mid = \mid u_{2p+1} - l \mid = \mid w_p - l \mid < \varepsilon$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

d) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et si f est continue sur $[a,b]$, comme $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $f(l) = l$.

4) Ici $f(x) = \dfrac{x}{1+x} : [0,1] \to [0,1]$ et que f est décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, d'après ce qui précéde les deux suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers l_1 et $l_2 \in [0,1]$. comme f est continue sur $[0,1]$, donc $f(l_i) = l_i$ où $i = 1, 2$. il s'en suit que $l_i = \dfrac{l_i}{1+l_i}$, donc $l_i = 0$. D'après la question d) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

5) La fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$, où $a > 0$ est continument dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x, y \in]\sqrt{a}, +\infty[$ la fonction f est continue sur le segment $[x,y]$ ou $[y,x]$ et dérivable sur $]x,y[$ ou $]y,x[$, donc d'après le (TAF) on a il existe $c \in]x,y[$ ou $]y,x[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$. Or $f'(c) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{c^2}$ et $c > x$ ou $> y$, alors $c > \sqrt{a}$ et en suit $0 < \dfrac{a}{c^2} < 1$. On en déduit que $\mid f'(c) \mid = \mid \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{c^2} \mid < \dfrac{1}{2}$, d'où $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x-y|$.

6) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 > \sqrt{a}$.

a) On vérifie aisément que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ et que $\left|u_n - \sqrt{a}\right| = \left|f(u_{n-1}) - f(\sqrt{a})\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|u_{n-1} - \sqrt{a}\right|$ et de proche en proche on en déduit que $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{a}\right|$.

b) Le fait que $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{a}\right|$ et la suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_n$ converge vers 0. On en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.