COURS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (SMA6)

SAID HADD

Table des matières

1. Les types de solutions des équations différentielles non-linéaires 2
1.1. Trois types de solutions aux équations différentielles ordinaires non-linéaires 2
1.2. Inerprétations de solutions équations différentielles dans le domaine de santé 2
1.3. Definitions mathématiques des solutions des EDO 3
1.4. Équations différentielles linéaires 4
2. Théorèmes gènèraux d'existence et unicité de la solution maximale des EDO 6
2.1. Fonctions localement Lipschitziennes et le lemme de Gronwall 6
2.2. Théorème de Cauchy-Lipschitz : existence locale 7
2.3. Critère de prolongement : théorème d'explosion 12
2.4. Le theéorème d'existence de Peano 17
3. Stabilité des points d'équilibres 19
Références 24

Prof. Said Hadd
Faculté des Sciences d'Agadir, Département de Mathématiques, Université Ibn Zohr.
Année Universitaire: 2019-2020.

Département de Mathématiques — Université Ibn Zohr, Agadir
Faculté des Sciences — A.U. 2019/2020
Filière SMA6 — Prof. Said Hadd

Notes de cours d'équations différentielles (SMA6)

1. Chapitre I : Les types de solutions des équations differentielles non-linéaires

De nombreux problèmes de physique, de biologie et d'ingénierie sont modélisés sous la forme d'équations différentielles ordinaires non linéaires. Comme l'ont dit les mathématiciens, la vie est non linéaire, dans laquelle nous sommes confrontés à de nombreux problèmes. Ces types d'équations prennent la forme suivante

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \tag{Eq}$$

où $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une fonction continue, I un intervalle dans $\mathbb{R}$ et Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$. Lorsque $(t, x) \in I \times \Omega$, alors t représente le "temps" et x un élément de "l'espace de travail". Par exemple, si nous analysons l'évolution de la division cellulaire dans une zone du corps, celle-ci est exactement Ω. Notez que u représente le nombre de cellules dans la région Ω, tandis que l'équation (Eq) représente la façon de produire ces cellules. Ainsi, le nombre de cellules augmente lorsque le temps t passe.

1.1. **Trois types de solutions aux équations différentielles ordinaires non linéaires.** Les solutions d'équations différentielles dépendent de la longueur de l'intervalle dans lequel se produit l'évolution de l'expérience. Par exemple, pendant l'expérience qui dure une courte période ($t \in J \subset I$), nous obtenons déjà certaines informations et résultats requis, nous avons donc une "solution locale". Mais pour obtenir plus d'informations sur le modèle mathématique, nous devons poursuivre notre expérience et allonger l'intervalle de temps, nous obtenons donc des information suffisantes sur la solution ; on parle alors de "solutions maximales". En revanche, il est important de laisser l'expérience se dérouler longtemps (sur I), on parle donc de ≪solutions globales≫.

1.2. **Interprétations de solutions d'équations différentielles dans le domaine de la santé.** Revenons à l'exemple de la division cellulaire. Lorsque vous voulez tester le sang pour savoir s'il a ou non un cancer ; cela se fait à l'aide d'un algorithme basé sur un modèle mathématique régi par des équations différentielles non linéaires. En effet, pendant une courte période d'analyse sanguine, l'algorithme nous donne un résultat (solution locale). Cela peut être négatif si nous avons une division cellulaire normale, ce qui signifie que les cellules sont produites en douceur.

Sinon, nous avons un résultat positif et cela signifie que la division produit un grand nombre de cellules ; c'est une infection cancéreuse. Dans ce cas, nous sommes devant deux possibilités. Si la vitesse de division cellulaire est élevée, on arrive alors à un temps maximum T qui est celui où le corps ne peut pas supporter ce grand nombre de cellules (solution maximale) ; c'est la fin de la vie. Nous notons que cette fois T est calculé par les médecins (cela peut prendre quelques mois). Maintenant, si la vitesse de division n'est pas vraiment élevée, alors nous avons la chance de combattre à nouveau le cancer. Dans ce cas, votre médecin vous donnera des médicaments qui peuvent vous aider à rester en bonne santé pendant très longtemps, ce qui est la solution globale (ou globale).

1.3. **Définitions mathématiques des solutions des EDO.** Après avoir formellement dicté sur un exemple de santé les différents types de solutions d'une équation différentielle non linéaire, nous donnons également la définition mathématique de ses types de solutions.

Définition 1.1. Une solution locale (ou bien juste solution) de l'équation différentielle (Eq) est un couple (J, φ), où J est sous intervalle de I et $\varphi : J \to \Omega$ une fonction de classe C^1, et que φ vérifie l'équation (Eq).

Si (J, φ) est une solution de (Eq) et si $t_0 \in J$, alors la function φ satisfait l'équation intégrale

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \qquad \forall t \in J. \tag{EI}$$

Inversement toute fonction φ satisfaisant l'équation intégrale (EI) est solution de l'équation différentielle (Eq).

Définition 1.2. Soit $(t_0, \Omega) \in I \times \Omega$. Le problème de Cauchy avec condition initial (t_0, x_0) un système de la forme

$$(PC)_{t_0,x_0} \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)), & t \in I, \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dans le problème de Cauchy $(PC)_{t_0,x_0}$, t_0 est le temps initial (début de l'expérience) et x_0 l'état des système à l'instant t_0 (l'état du système avant le démarage de l'expérience).

Définition 1.3. Soit (J_1, φ_1) et (J_2, φ_2) deux solutions de l'équation différentielle (Eq). On dit que (J_2, φ_2) prolonge (J_1, φ_1) si $J_1 \subset J_2$ et $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$ pour tout $t \in J_1$.
Une solution (J, φ) de l'équation (Eq) est une **solution maximale** s'elle n'admet pas de prolongement en une autre solution de (Eq).

En pratique, il est important d'avoir une solution qui dure longtemps. Cela permet une étude détaillée de ce type de solution.

Définition 1.4. Une solution (J, φ) de l'equation différentielle (Eq) est dite globale si $J = I$.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons des théorèmes qui donnent les conditions pour l'existence et l'unicité de la solution maximale. Ce sont le théorème de Péano et le théorème de Cauchy-Lipschitz. Avant de le faire, dans la section suivante nous allons voir ce qui se passe dans le cas où la fonction f prend une forme spéciale $f(t, x) = Ax + g(t)$, où A est une matrice carrée d'ordre d et g une fonction continue.

1.4. **Equation différentielles linéaires.** Dans ce paragraphe on suppose que $I = [0, +\infty[$ (on peut même supposer que $I = \mathbb{R}$) et $\Omega = \mathbb{R}^d$. De plus on suppose que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est définie par

$$f(t, x) = Ax + g(t), \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d,$$

avec A une matrice carrée d'ordre d ($A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$), et $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On rappelle que la norme de la matrice A est donnée par

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

On fait comme $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ coincide avec $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, l'espace des application linéaires continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, alors on a

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Il est claire que for tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

D'autre part, Pour tout (t, x) et (s, y) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, on a

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq \|A\|\|x - y\| + \|g(t) - g(s)\|.$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. D'autre part, on définit

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \qquad t \geq 0.$$

Remarquons que for tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\| \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \leq \frac{(t\|A\|)^n}{n!}.$$

Comme $\frac{(t\|A\|)^n}{n!}$ est le term général de série exponentielle réelle, qui est convergente, alors la série de term général $\frac{t^n}{n!} A^n$ est convergente dans l'espace de matrices $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, (de dimension $2d$), qui est complet pour la norme des matrices. Ceci implique e^{tA} est bien défini et que e^{tA} est une matrice d'ordre d, appellé l'exponentielle de la matrice tA. Par comparaison des séries

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq e^{t\|A\|}, \qquad \forall t \geq 0.$$

On note aussi que

$$Ae^{tA} = e^{tA} A, \qquad \forall t \geq 0.$$

Il faut faire attention, en général la formule de binôme n'est pas vrais dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$,, car cet espace n'est pas commutatif. Donc si A et B sont dex matrices carrées d'ordre d, alors

$$e^{A+B} \neq e^A e^B.$$

Comme les matrice tA et sA comutent pour tout t, s dans $\mathbb{R}$ et A matrice carrée, alors on a le lemme suivant :

Lemme 1.5. *Pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on a*

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}\, e^{sA}.$$

Démonstration. La démonstration est basée sur le séries produits et la formule de binôme. Soit α_n et β_n les terms généraux des séries e^{tA} et e^{sA}. Alors pour tout n,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = e^{tA}\, e^{sA},$$

avec

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} A^{n-k} \\ &= \frac{A^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k s^{n-k} = \frac{(t+s)^n}{n!} A^n. \end{aligned}$$

C'est le term général de la série $e^{(t+s)A}$. □

Proposition 1.6. *Soit A une matrice carrée d'ordre d et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Alors le problème de Cauchy linéaire suivant*

$$(PC)_{0,x_0} \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution globale unique donnée par

$$u(t) = e^{tA} x_0, \qquad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Soit $h \in (0,1)$ et $t \geq 0$. En appliquant le Lemme 1.5, on a

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= e^{tA} \frac{e^{hA} x - x}{h} \\ &= e^{tA} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} A^k x \end{aligned}$$

En déduit alors après un changement de variable $m = k - 1$, on obtien

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - e^{tA} A x \right\| &= \left\| e^{tA} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} A^k x \right\| \\ &= \left\| e^{tA} A \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{h^m}{k!} A^m x \right\| \\ &\leq \|A\| e^{t\|A\|} \left(e^{h\|A\|} - 1 \right) \|x\|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}=e^{tA}Ax=Ae^{tA}x=Au(t).$$

D'où le résultat. $\square$

Maintenant on a le résultat suivant qui donne l'existence de la solution globale d'un problème de Cauchy non-homogène.

Théorème 1.7. *Soit A une matrice carrée d'ordre d, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Alors le problème de Cauchy linéaire non-homgène suivant*

$$(PC)_{0,x_0,g} \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + g(t), & t \geq 0,\\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution globale unique donnée par

$$u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)ds, \qquad \forall t \geq 0.$$

Cette formule est appelé la formula de la variation de la constante.

Démonstration. Pour l'existnce et l'unicité voir le chapitre 2. Mainteant on montre la formule de la variation de la constante. En effet, soit $u : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^d$ la solution de $(PC)_{0,x_0,g}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(e^{-sA}u(s)\right) &= e^{-sA}u'(s) - Ae^{-sA}u(s)\\ &= e^{-sA}(Au(s)+g(s)) - Ae^{-sA}u(s)\\ &= e^{-sA}g(s). \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t, on trouve

$$\left[e^{-sA}u(s)\right]_0^t = \int_0^t e^{-sA}g(s)ds.$$

Ce qui implique

$$e^{-tA}u(t) - e^{-tA}x_0 = \int_0^t e^{-sA}g(s)ds.$$

En applique e^{tA} aux deux cotés de cette égalite, on obtient donc la formule de la variation de la constante. $\square$

2. Chapitre II : Théorèmes généraux d'existence et unicité de la solution maximale des EDO

Dans ce chapitre on introduit des conditions sur le champ de vecteur $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ pour que le problème de Cauchy suivant

$$(PC)_{t_0,x_0} \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I, \\ u(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution maximale unique. Puis on donne d'autres conditions pour que cette solution soit gloable (voir le Chapitre I pour les definition de ce type de solution). Ici, comme on a déjà définie dans le Chapitre I, f est continue sur $I \times \Omega$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$.

2.1. **Fonctions localemnt Lipschitziennes et le lemme de Gronwall.** Nous allons voir que la régularité de la fonction f par rapport a sa deuxième variable va jouer un rôle important pour l'existence et l'unicité des solutions.

Définition 2.1. Le fonction f est dite localment lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$, si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage $V_{(t_0,x_0)} = V$ de (t_0, x_0) et une constante $C > 0$ tels que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq C\|x - y\|, \qquad \forall (t, x), (t, x) \in V.$$

Le résultat suivant introduit une condition très pratique pour qu'une application soit localement lipschtzienne.

Lemme 2.2. *Si la dérivée partialle $\frac{\partial}{\partial x} f$ existe et si $(t, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ est continue (en particulier si f est de classe C^1 sur $I \times \Omega$), alors la fonction f est localment lipschitzienne par rapport a sa deuxième variable*

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et soit V un voisinage compact de ce point. Soit

$$C := \sup_{(s,y) \in V} \left\| \frac{\partial}{\partial x} f(s, y) \right\| < \infty.$$

Alors par application de l'inégalité des accroissement finis, on a for tout $(t, x_1), (t, x_2)$ dans V,

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|.$$

□

Voici maintenant un lemme technique et très important pour les cours et les exercices des équations différentielles :

Lemme 2.3. (Lemme de Gronwall) *Soit* $\varphi : [a, b] \to [0, +\infty[$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et soit* $c \in [a, b]$*. On suppose qu'il existe des constantes réelles* $\alpha, \beta \geq 0$ *tels que*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_c^t \varphi(s) ds \right|, \quad \forall t \in [a, b].$$

Alors on a

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta |t-c|}, \qquad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration. Pour simplifier on suppose que $t \geq c$ et on pose

$$F(t) = \alpha + \beta \int_c^t \varphi(s) ds.$$

Alors F est une fonction de classe C^1 et $F'(t) = \beta \varphi(t) \leq \beta F(t)$ pour tout t. On a alors

$$e^{-\beta} F'(t) - \beta e^{-\beta} F(t) \leq 0.$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt} e^{-\beta} F(t) \leq 0.$$

Il suffit donc d'intégrer entre les points c et t. □

Voici une version plus générale du Lemme de Gronwall (même preuve que le cas simple).

Exercice 2.4. Soit $\varphi, \psi : [a, b] \to [0, +\infty[$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit $c \in [a, b]$. On suppose qu'il existe des constantes réelles $\alpha, \beta \geq 0$ tels que

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_c^t \psi(s) \varphi(s) ds \right|, \quad \forall t \in [a, b].$$

Alors on a

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp \left(\beta \left| \int_c^t \psi(s) ds \right| \right), \qquad \forall t \in [a, b].$$

2.2. **Théorème de Cauchy-Lipschtz :existence locale.** Ici nous allons donner un théorème d'existence et unicité de solution du problème de Cauchy non-linéaire.

A) Théorème de Cauchy-Lipschitz précisé :

Soit $\alpha > 0$, $r > 0$, et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ tels que

(H1) $Q := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r) \subset I \times \Omega$ et $f : Q \to \mathbb{R}^d$ continue, et soit $M > 0$ telle que

$$\|f(t, x)\| \leq M, \qquad \forall (t, x) \in Q.$$

(H2) On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq C \|x - y\|$$

pour tout $(t, x), (t, y) \in Q$.

Théorème 2.5. (Cauchy-Lipschitz précisé) *Sous les conditions* **(H1)** *et* **(H2)** *l'équation différentielle suivante*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \qquad u(t_0) = x_0,$$

admet une solution unique (J, u) *avec*

(i) $J = [t_0 - T, t_0 + T]$, $T = \min\left(\alpha, \frac{r}{M}\right)$,

(ii) $u(t_0) = x_0$

(iii) $(s, u(s)) \in Q$ *pour tout* $s \in J$.

Démonstration. Soit $T = \min\left(\alpha, \frac{r}{M}\right)$ et $J = [t_0 - T, t_0 + T]$. On définit la suite de fonctions $(u_k)_k$ par

$$u_0(t) = x_0, \quad u_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{k-1}(s))ds, \quad \forall t \in J.$$

Etape 1 : Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $s \in J$ on a $(s, u_k(s)) \in Q$.
En effet, pour $k = 0$, on a $u_0(s) = x_0 \in \overline{B}(x_0, r)$ pour tout $s \in J$. Et donc $(s, u_0(s)) \in Q$.
Supposons maintenant que $(s, u_{k-1}(s)) \in Q$ pour tout $s \in J$. On a

$$\begin{aligned} u_k(s) - x_0\| &= \|f(\sigma, u_{k-1}(\sigma))d\sigma\| \\ &\leq M|s - t_0| \leq MT \leq M\frac{r}{M} = r. \end{aligned}$$

Donc $u_k(s) \in \overline{B}(x_0, r)$ for tout $s \in J$, et donc $(s, u_k(s)) \in Q$. Ceci implique que la suite de fonctions $(u_k)_k$ est bien définie.
Etape 2 : Montrons que pour tout $k \geq 1$ et $t \in J$ on a

$$\|u_k(t) - u_{k-1}(t)\| \leq M\frac{C^{k-1}}{k!}|t - t_0|^k.$$

Pour $k = 1$, on a

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_0(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds \right\| \\ &\leq M|t - t_0| = M\frac{C^{1-1}}{1!}|t - t_0|^1. \end{aligned}$$

Supposons que c'est vraie a l'ordre $k-1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|u_k(t)-u_{k-1}(t)\| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s,u_{k-1})-f(s,u_{k-2})\| ds\right| \\
&\leq C\left|\int_{t_0}^{t} \|u_{k-1}u_{k-2}\| ds\right| \\
&\leq C\left|\int_{t_0}^{t} MC^{k-2}\frac{|s-t_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds\right| \\
&\leq \frac{MC^{k-1}}{(k-1)!}\left|\left[\frac{(s-t_0)^k}{k}\right]_{t_0}^{t}\right| \\
&\leq M\frac{C^{k-1}}{k!}|t-t_0|^k.
\end{aligned}$$

Etape 3 : Montrons que $(u_k)_k$ converge uniformément sur J vers une fonction u. En effet, pout tout $t\in J$ on a $|t-t_0|\leq T$, et donc

$$\|u_k(t)-u_{k-1}(t)\| \leq \frac{M}{C}\frac{(CT)^k}{k!}.$$

Comme la série numérique $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k-u_{k-1})$ converge uniformément. Soit

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k-1}).$$

Cette suite de fonction converge uniformément. Donc

$$\|u_{n+p}-u_n\|_\infty = \|S_{n+p}-S_n\|_\infty \to 0.$$

La suite de fonctions $(u_k)_k$ converge uniformément dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(J,\mathbb{R}^d)$. Ainsi il existe une fonction $u\in C(J,\mathbb{R}^d)$ avec $u_k\to u$ uniformément quand $k\to+\infty$. D'autre part, comme

$$\|u_k(t)-x_0\|\leq r,$$

alors par passage à la limite on a aussi

$$\|u(t)-x_0\|\leq r,$$

Ce qui montre que $(t,u(t))\in Q$ pour tout $t\in J$. De plus on a

$$u(t)=x_0+\lim_{k\to+\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,u_{k-1}(s))ds.$$

On a aussi

$$\sup_{s\in J}\|f(s,u_{k-1}(s))-f(s,u(s))\|\leq C\|u_{k-1}-u\|_\infty.$$

Ceci montre que $f(\cdot, u_{k-1}(\cdot))$ converge uniformément vers $f(\cdot, u(\cdot))$. Donc on peut entre la limite à l'intérieur fr l'intégrale. Ainsi

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \qquad \forall t \in J.$$

C'est la solution qu'on cherche.
Etape 4 : Unicité : Supposons qu'il existe deux solution (J, u) et $(J, \tilde{u})$. Alors pour tout t, on a

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\| ds \right|$$
$$\left| \int_{t_0}^{t} \|u(s) - \tilde{u}(s)\| ds \right|.$$

Par application du Lemme de Gronwall, on a $\|u(t) - \tilde{u}(t)\| = 0$ pout tout $t \in J$. Ce qui fallait démontrer. □

Autre méthode : On rappel le the théorème de point fixe de Banach suivant : Si E est un espace de Banach et $\Phi : E \to E$ une application contractante, c'est-à-dire il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in E,$$

alors Φ admet un point fixe unique, c'est-à-dire il existe un unique $u \in E$ tel que $\Phi(u) = u$. Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Phi^n(u) = u$ (ici Φ^n c'est la composition de Φ n fois, c'est les itérées de Φ).
Inversement, supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et un $u \in E$ unique tel que $\Phi^m(u) = u$, alors aussi $\Phi(u) = u$. En effet, $\Phi^m(\Phi(u)) = \Phi^{1+m}(u) = \Phi(\Phi^m(u)) = \Phi(u)$. Donc par unicité, on a $\Phi(u) = u$.

Vue cette remarque, pour demontrer que Φ admet un point fixe, il suffit de le montrer pour une itérée de Φ.
Revenons à la preuve du Théorème 2.5. Soit $E = \mathcal{C}(J, \overline{B}(x_0, r))$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On défini l'application

$$\Phi : E \to E, \quad u \mapsto \left(t \mapsto [\Phi(u)](t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \right).$$

En utilisant les conditions **(H1)** et **(H2)**, on montre que pour tout $v, w \in E$, on a

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_\infty \leq rC \|v - w\|_\infty.$$

On remarque que Φ est contractante si on impose la condition $rC < 1$. Donc pour eviter cette condition, on doit essayer de montrer qu'il existe une itérée de Φ qui est contractante. En effet, par récurrence sur n, on peut montrer que pour tout $t \in J$, et $v, w \in E$, on a

$$\|(\Phi^n(v))(t) - (\Phi^n(w))(t)\| \leq \frac{C^n}{n!} |t - t_0|^n \|v - w\|_\infty.$$

Comme $|t - t_0| \leq T$, alors on a

$$\|\Phi^n(v) - \Phi^n(w)\|_\infty \leq \left(\frac{rC}{M}\right)^n \frac{1}{n!}\|v - w\|_\infty.$$

Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\gamma := \left(\frac{rC}{M}\right)^m \frac{1}{m!} < 1.$$

Ce qui implique que

$$\|\Phi^m(v) - \Phi^m(w)\|_\infty \leq \gamma\|v - w\|_\infty.$$

Ainsi Φ^m est contractante, donc admet un point fixe. Donc aussi Φ admet un point fixe unique. Ce qui fallait démontrer.

B- Le théorème de Cauchy-Lipschtz :

Après avoir donner un théorème qui donne l'existence et l'unicté des solutions dans un cas spécial dans lequelle le champ de vecteur f est défini seulement sur un compact de $Q \subset I \times \Omega$. Maintenant nous donnons le résulat général pour une fonction défini sur $I \times \Omega$ tout entier.

Théorème 2.6. *Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue et localement lipschtzienne par rapport a sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Pour tout $(t, 0, x_0) \in I \times \Omega$ il passe une unique solution (J, u) avec $J \subset I$ de l'équation*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = x_0.$$

Démonstration. Comme $I \times \Omega$ est un ouvert et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, alors on peut s'arranger pour trouver un voisinage compact $Q := [\alpha - t_0, \alpha + t_0] \times \overline{B}(x_0, r)$ du point (t_0, x_0) dans lequel f est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Il suffit donc d'appliquer Théorème 2.5. □

2.3. **Solutions maximale et globle : Théorie globale.** Dans le paragraphe précédent, sous les certaines conditions sur le champs de vecteurs f on a montrer l'existence et l'unicté d'une solution (J, u), où $J \subset I$ est un petit intervalle centré en t_0. La question qui se pose est ce que on peut prolonger u sur un intervalle plus grand que J ? Est ce que J peut être I tout entier ?

A) Existence et unicité de la solution maximale :

Théorème 2.7. (Unicité globale) *Supposons que f est continue sur $I \times \Omega$ et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variables. Soient (u_1, J_1) et (u_2, J_2) deux solution de l'équation différentielle*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \tag{Eq}$$

telles que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Si il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.

Démonstration. Si $J_1 \cap J_2 = \{t_0\}$, alors rien à démontrer. Si non on suppose que $J_1 \cap J_2$ est un intervalle ouvert. On pose

$$\Lambda := \{t \in J_1 \cap J_2 : u_1(t) = u_2(t)\}.$$

On a $\Lambda \neq \emptyset$ car $t_0 \in \Lambda$. De plus $\Lambda = (u_1 - u_2)^{-1}\{0\}$ est un fermé car $u_1 - u_2$ est continue et $\{0\}$ est un fermé. Montrons maintenant que Λ est un ouvert. Soit $t_1 \in \Lambda$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\subset J_1 \cap J_2$. Soit le problème de Cauchy suivant

$$(PC)_{t_1,u_1(t_1)} \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_1) = u_1(t_1). \end{cases}$$

D'aprés le Théorème 2.6, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ avec $t_1 \in \mathcal{O}$ et une solution unique $u : \mathcal{O} \to \Omega$ du problème de Cauchy. Mais on a $\dot{u}_1(t) = f(t, u_1(t))$, $\dot{u}_2(t) = f(t, u_2(t))$ et $u(t_1) = u_1(t_1) = u_2(t_1)$. Donc u_1 et u_2 sont aussu solution du problème de Cauchy $(PC)_{t_1,u_1(t_1)}$. Par unicité on a $u_1 = u_2$ sur $\mathcal{O}$, et par suit, $\mathcal{O} \subset \Lambda$. D'où Λ est un ouvert. Par connexité on a $\Lambda = J_1 \cap J_2$. Ce qui fallait démontrer. □

Théorème 2.8. *Soit f est continue sur $I \times \Omega$ et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variables. Pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ il passe une solution maximale unique (u, J) avec J un intervalle ouvet de la forme $J =]T_*, T^*[$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toute les solutions de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)).$$

On a $\mathcal{S}$ est non vide d'après Cauchy-Lipshitz. On écrit

$$\mathcal{S} = \{(u_\alpha, J_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}.$$

De plus on note

$$J = \cup_{\alpha \in \Gamma} J_\alpha.$$

On définit une application sur J par : Si $t \in J$, il exists $\alpha \in \Gamma$ tel que $u(t) = u_\alpha(t)$ et $t \in J_\alpha$. Alors (J, u) ne prolong pas en une autre solution. C'est la solution maximale. □

2.4. **Critère de prolongement : théorème d'explosion.** L'objectif de ce paragraphe est donner un critère de prolongement des solutions.

Théorème 2.9. *On prend $I = [a, b]$ et $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f :]a, b[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Soit (J, u) une solution de*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \tag{Eq}$$

avec $\beta = \sup J < b$. Si u est bornée dans un voisinage de β, alors la solution (J, u) peut être prolongée au dela de β en une solution de (Eq).

Démonstration. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\|x(t)\| \leq C, \qquad \forall t \in [\beta - \delta, \beta[.$$

On pose $K = [\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}(0, C)$. Comme f est continue sur le compact K alors f est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que

$$M := \sup_K \|f\|.$$

Pour tout $t \in [\beta - \delta, \beta[$ on a $(t, x(t)) \in K$, et donc

$$\|\dot{u}(t)\| = \|f(t, u(t))\| \leq M, \qquad \forall t \in [\beta - \delta, \beta[.$$

Par application de l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\|u(t) - u(t')\| \leq M|t - t'|, \qquad \forall t, t' \in [\beta - \delta, \beta[.$$

Ceci implique que u est uniformément continue sur $[\beta - \delta, \beta[$. D'où

$$\ell = \lim_{t \to \beta} u(t) \quad \text{existe.}$$

On considère le problème de Cauchy

$$(PC)_{\beta,\ell} \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)), \\ u(\beta) = \ell. \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe un solution $\tilde{u} : [\beta, \beta + \varepsilon[\to \mathbb{R}^d$. Maintenant on définie la function

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in]\alpha, \beta[, \\ \tilde{u}(t), & t \in [\beta, \beta + \varepsilon[. \end{cases}$$

De plus $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, and $\dot{\tilde{u}}(t) = f(t, \tilde{u}(t))$ pour tout $t \in [\beta, \beta + \varepsilon[$. D'autre part,

$$\lim_{t \to \beta^-} \dot{u}(t) = \lim_{t \to \beta^-} f(t, u(t)) = f(\beta, \ell) = \dot{\tilde{u}}(\beta).$$

Ceci montrer que $(]\alpha, \beta + \varepsilon[, w)$ est une solution. $\square$

Voici maintenant un théorème qui donne des informations sur la solution globale.

Théorème 2.10. (Explosion : le cas $I =]a, b[$, $\Omega = \mathbb{R}^d$)
Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue et soit $(]T_*, T^*[, u)$ une solution maximale de l'équation

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)).$$

Alors on a les cas suivants

(1) Ou bien $T^* = b$ (globale adroit), ou bien

$$T^* < b \quad \text{et} \quad \lim_{t \to (T^*)^-} \|u(t)\| = \infty.$$

(2) Ou bien $T^* = b$ (globale adroit), ou bien

$$T_* > a \quad \text{et} \quad \lim_{t \to (T_*)^+} \|u(t)\| = +\infty.$$

Démonstration. Si $T^* = b$, alors rien à montrer. Supposons maintenenat que $T^* < b$. Si $\|u(t)\|$ ne tends pas vers $+\infty$ quand $t \to (T^*)^-$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $t \in [T^* - \delta, T^*[$ et $\|x(t)\| \leq C$. Pour tout $n \geq 1$, on prend $\delta = \frac{1}{n}$, il existe donc une suite $(t_n)_n \subset [T^* - \delta, T^*[$ tel que $t_n \to T^*$ quand $n \to \infty$ et $\|u(t_n)\| \leq C$. D'autre part, soit $\alpha \in]T_*, T^*[$ et $\beta \in]T^*, b[$. Soit $r > O$ et f une fonction $Q_{\alpha,\beta} := [\alpha, \beta] \times \overline{B}(0, C+r)$. Soit

$$M = \sup_{Q_{\alpha,\beta}} \|f\|.$$

Comme $t_n \to T^*$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $t_N - T^* > \frac{-r}{M}$. Ceci implique que $t_N + \frac{r}{M} > T^*$. On pose $u_N = u(t_N)$ et

$$Q_N = [t_N, \beta] \times \overline{B}(u_N, r).$$

On a

$$Q_N \subset Q_{\alpha,\beta}.$$

En effet, si $(t, x) \in Q_N$ alors $t \in [\alpha, \beta]$ et $\|x\| \leq \|u_N\| + \|x - u_N\| \leq C + r$. Donc $\sup_{Q_N} \|f\| \leq M$. Mais $(t_N, u(t_N)) \in Q_N$ et f continue sur Q_N et bornée par M, donc le théorème de Péano implique que le problème de Cauchy

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_N) = u_N$$

admet une solution $y : [t_N, t_N + T] \to \mathbb{R}^d$, avec $T = \min\left\{\beta - t_N, \frac{r}{M}\right\}$. On a alors, $t_N + T > T^*$. En effet, si $T = \beta - t_N$, alors $T + t_N = \beta > T^*$. Si $T = \frac{r}{M}$, alors $t_N + T = t_N + \frac{r}{M} > T^*$. La fonction

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in]T_*, t_N], \\ y(t), & t \in [t_N, t_N + T[\end{cases}$$

est une solution, ce qui contredi la maximalité de T^*. □

Maintenant on donne des conséquence de ce théorème.

Lemme 2.11. *Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On suppose que f est bornée sur $]a, b[\times \mathbb{R}^d$, c'est à dire il existe $M > 0$ tel que*

$$\|f(t, x)\| \leq M, \qquad \forall (t, x) \in]a, b[\times \mathbb{R}^d.$$

Donc toute solution de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$

est globale.

Démonstration. Soit $u :]T_*, T^*[\to \mathbb{R}^d$ une solution maximale de (Eq). Supposons que $T^* < b$, donc d'après le Théorème 2.10 on a

$$\lim_{t \to T^*} \|u(t)\| = +\infty.$$

Donc il existe $\delta > 0$ tel que la fonction u n'est pas bornée sur $[T^* - \delta, T^*[$. Mais on a

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

Ainsi

$$\|u(t)\| \leq \|x_0\| + |t - t_0|M \leq \|x_0\| + T^*M, \qquad \forall t \in [t_0, T^*[.$$

C'est une contraduction. □

Voici maintenant un plus plus général du lemme précédent.

Lemme 2.12. *Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On suppose que pour tout K compact de $]a, b[$ il existe deux de constante $C_1, C_2 \geq 0$*

$$\|f(t, x)\| \leq C_1\|x\| + c_2, \qquad \forall (t, x) \in K \times \mathbb{R}^d.$$

Donc toute solution de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$

est globale.

Démonstration. Soit $u :]T_*, T^*[\to \mathbb{R}^d$ une solution maximale. Supposons que $T^* < b$, alors d'après le théorème de l'explosion, il existe un $\delta > 0$ tel que la solution u n'est pas bornée sur $[T^* - \delta, T^*[$. Soit $t_1 \in]T^* - \delta, T^*[$. Alors pour tout $t \in [t_1, T^*[$ on a

$$u(t) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, u(s))ds.$$

D'autre part, on pose $K = [T^* - \delta, T^*] \subset]a, b[$. Alors K est un compact. De plus,

$$\|f(s, u(s))\| \leq C_1\|u(s)\| + C_2, \qquad \forall s \in [t_1, T^*[.$$

Donc

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_1)\| + C_2(T^* - t_1) + C_1 \int_{t_1}^{t} \|u(s)\|ds.$$

D'après le lemme de Gronwall on a

$$\|u(t)\| \leq (\|u(t_1)\| + C_2(T^* - t_1))\, e^{C_1(t - t_1)} \leq (\|u(t_1)\| + C_2(T^* - t_1))\, e^{C_1(T^* - t_1)} := C^*.$$

Donc u □

Exemple 2.13. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue tel que il existe une autre fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue, et un réel $R > 0$ tels que

$$\langle x, f(t, x)\rangle \leq \psi(t)\|x\|^2, \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times (B(0, R))^c.$$

Montrons que la solution maximale de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = x_0 \tag{Eq}$$

est définie sur $[t_0, +\infty[$.
Preuve : Soit $u : [t_0, T^*[\to \mathbb{R}^d$ la solution maximale de (Eq) et montrons que $T^* = +\infty$.

Par l'absurd, supposons que $T^* < +\infty$. Donc $\|u(t)\| \to +\infty$ quand $t \to (T^*)^-$. Donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [T^* - \delta, T^*[$ on a $\|u(t)\| \geq R$. Ce qui implique que

$$u(t) \in (B(0, R))^c, \qquad \forall t \in [T^* - \delta, T^*[.$$

D'autre part comme la l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est differentiable et que u est dérivable sur $[t_0, T^*[$, alors aussi la fonction $t \in [t_0, T^*[\mapsto \|u(t)\|^2$ est dérivable, et on a for tout $t \in [T^* - \delta, T^*[$ et tout $s \in [T^* - \delta, t]$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\|u(s)\|^2 &= 2\langle u(s), \dot{u}(s)\rangle = 2\langle u(s), f(s, u(s))\rangle \\ &\leq 2\psi(s)\|u(s)\|^2.\end{aligned}$$

En intégrant entre t_0 et t, on obitent (on pose $\delta^* = T^* - \delta$),

$$\|u(t)\|^2 \leq \|x_2\|^2 + 2\int_{\delta^*}^{t} \psi(s)\|u(s)\|^2 ds, \qquad \forall t \in [\delta^*, T^*[.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on trouve

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| e^{\delta\|\psi\|_\infty}, \qquad \forall t \in [\delta^*, T^*[,$$

avec $\|\psi\|_\infty := \sup_{[0,T^*]} |\psi|$. Ceci est une contraduction ! !

Proposition 2.14. (Osgood) *Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Supposons que pour tout compact $K \subset I$, il existe une fonction $F : \mathbb{R}^+ \to]0, +\infty[$ une fonction continue tel que*

$$\int_{cdot}^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} = +\infty, \quad \|f(t, x)\| \leq F(\|x\|), \qquad \forall (t, x) \in K \times \mathbb{R}^d.$$

Alors toute solution de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)),$$

est globale.

Démonstration. Soit $u :]T_*, T^*[\to \mathbb{R}^d$ une solution maximale de (Eq). Si T^* et si on pose $r(t) = \|u(t)\|$, alors d'aprés le théorème 2.10, on a $r(t) \to +\infty$ quand $t \to T^*$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [T^* - \delta, T^*[$ on a $r(t) \geq 1$. On pose $\delta^* = T^* - \delta$, donc en dérivant la fonction $t \mapsto r^2(t)$ on obtient, pout tout $t \in [\delta^*, T^*[$,

$$2r(t)\dot{r}(t) = 2\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle.$$

En appliquant l'inégalitée de Cauchy-Schwartz imlique que pour tout $t \in [\delta^*, T^*[$,

$$r(t)\dot{r}(t) \leq r(t)\|f(t, u(t))\|.$$

Comme $r(t)$ est non null alors

$$\dot{r}(t) \leq \|f(t, u(t))\|, \qquad \forall t \in [\delta^*, T^*[.$$

Si on choisit le compact $K := [\delta^*, T^*]$, alors par application de la condition de la propostion on a alors

$$\dot{r}(t) \leq F(\|u(t)\|) = F(r(t)), \qquad \forall t \in [\delta^*, T^*[.$$

Donc pour tout $t \in [\delta^*, T^*[$,

$$\int_{\delta^*}^{t} \frac{r'(s)}{F(r(s))} ds \leq \delta.$$

Avec une même méthode vue en TD, on a

$$\int_{\delta^*}^{t} \frac{r'(s)}{F(r(s))} ds = \int_{r(\delta^*)}^{r(t)} \frac{d\sigma}{F(\sigma)} \leq \delta.$$

Comme $r(t) \to +\infty$ quand $t \to T^*$, on a

$$\int_{r(\delta^*)}^{+\infty} \frac{d\sigma}{F(\sigma)} \leq \delta.$$

Absurd. $\square$

2.5. **Le théorème d'existence de Peano.** Dans cette section, nous verrons que l'existence de solutions d'équations différentielles est garantie si nous supposons simplement la continuité des champs vectoriels associés. Nous avons besoin des définitions suivantes

Définition 2.15. Soit $\varphi_n : I \to \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions.

(i) La famille $(\varphi_n)_n$ est dite equibornée si il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|\varphi_n(t)\| \leq M$ pour tout $t \in I$.

(ii) La famille $(\varphi_n)_n$ est dite equicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $t, s \in I$,

$$|t - s| \leq \delta \Longrightarrow \|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)\| \leq \varepsilon.$$

Voici maintenant un résultat (en fait un corollaire) d'Ascoli (un des théorème important d'analyse fonctionnelle).

Théorème 2.16. (Ascoli) *Soit J un compact de $\mathbb{R}$ et $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^d)$. Si $(\varphi_n)_n$ est à la fois equibornée et équicontinue alors il existe une sous suite $(\varphi_{n_k})_k$ et une fonction continue $\varphi_\infty : J \to \mathbb{R}^d$ telle que f_{n_k} converge uniformément vers φ_∞.*

Dans le reste de cette section I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide; $t_0 \in I$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $x_0 \in \Omega$. On fixe $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$. Soit $f : I \times \Omega$ une fonction continue sur $I \times \Omega$. Quite à réduire I, on peut supposer que f est bornée sur $I \times \overline{B}(x_0, r)$, c'est-à-dire il existe $M > 0$ tel que

$$\|f(t, x)\| \leq M, \qquad \forall (t, x) \in I \times \overline{B}(x_0, r).$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.17. (Peano 1890) *On pose*

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}\right].$$

Il existe une application u de J dans $\overline{B}(x_0, r)$ solution du problème de Cauchy

$$(PC)_{t_0,x_0} \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions C^1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ convergeant uniformément vers f sur $I \times \overline{B}(x_0, r)$, et bornées en norme par M. Le Théorème 2.5 garantit l'existence d'une fonction $u_k : J \to \overline{B}(x_0, r)$ telle que

$$u_n(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{u}_n(t) = f_n(t, u_n(t)), \qquad \forall t \in J.$$

Ainsi pour tout $t \in J$, on a

$$u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(s, u_n(s))ds.$$

Il est facile de montrer (ce genre d'estimation sont déjà fait avant) que la suite de fonction $(u_n)_n$ est équiborné ; et équicintinue (puisque elles sont toutes lipschitziennes avec une même constante de Lipschitz qui est M). Donc d'après le théorème d'Ascoli en haut, il existe une suite de fonction $(u_{n_k})_k$ qui converge uniformément sur J vers une application continue u de J dans $\overline{B}(x_0, r)$. En passant a la limite (bien sur il faut vérifier que $f_{n_k}(\cdot, u_{n_k}(\cdot))$ converge uniformément ver $f(\cdot, u(\cdot))$) on a

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \qquad \forall t \in J.$$

C'est la solution qu'on cherche. □

On note que ce théorème n'assure pas l'unicité. En effet le problème de Cauchy suivant

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(t) = \sqrt{|u(t)|},$$

admet deux solutions, à savoir, la solution nulle, et la fonction suivante

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & t \geq 0, \\ -\frac{t^2}{4}, & t \leq 0. \end{cases}$$

3. Chapitre III : Stabilité des point d'équilibre

Dans ce chapite on considère les équation différentielles autonome, c'est-à-dire

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{u}(t) = f(u(t)), \qquad \forall t \geq t_0, \tag{Eq}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une function continue avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $x_0 \in \Omega$. Le théorème 2.17 (Peano) nous dit que (Eq) admet au moins une solution maximale (J, u).

Définition 3.1. Un point $x^* \in \Omega$ est dit un point d'équilibe (ou critique) de f s'il satisfait $f(x^*) = 0$.

En général le point d'équible de f n'est pas unique. De plus si f est linéaire sur $\mathbb{R}^d$, alors 0 est un point d'équilibre de f.

Remarque 3.2. Soit $x^* \in \Omega$ un point d'équilibre de f. On defini la fonction constante

$$v(t) = x^*, \quad \forall t.$$

Alors v est dérivable et on a $\dot{v}(t) = 0 = f(x^*) = f(v(t))$. Donc la fonction v est solution $\dot{v}(t) = f(v(t))$ et $v(t_0) = x^*$. Cette solution est appelée une **solution stationnaire**.

Dans la suite on s'interesse a la notion de stabilité des points d'équilibres de f, dans le sense suivant : si l'état initiale de l'équation (Eq), c'est à dire x_0, est proche du point d'équilibre (qui définie une solution stationnaire), est ce que pour les $t \geq 0$, la solution $u(t)$ reste aussi proche de x^*. Plus précisement on a la définition suivante :

Définition 3.3. Soit $x^* \in \Omega$ un point d'équilibe de $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

(1) x^* est dit **stable**, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que si u est la solution du problème de Cauchy (Eq) avec état intial $u(t_0) = x_0$ vérifiant $\|x_0 - x^*\| < \delta$, alors on a
- u est définie pour tout $t \geq t_0$, (solution globale),
- $\|u(t) - x^*\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.

(2) x^* est dit **instable** s'il n'est pas stable.

(3) x^* est dit **asymptotiquement stable** si : il existe $\delta > 0$, tel que si u est la solution du problème de Cauchy (Eq) avec état intial $u(t_0) = x_0$ vérifiant $\|x_0 - x^*\| < \delta$, alors on a
- u est définie pour tout $t \geq t_0$, (solution globale),
- $\lim_{t\to+\infty} u(t) = x^*$.

(4) x^* est dit **exponentiellement stable** si : il existe $\delta > 0$, tel que si u est la solution du problème de Cauchy (Eq) avec état intial $u(t_0) = x_0$ vérifiant $\|x_0 - x^*\| < \delta$, alors on a
- u est définie pour tout $t \geq t_0$, (solution globale),
- il existe $\omega, M > 0$ tels que

$$\|u(t) - x^*\| \leq M e^{-\omega t} \|x_0\|, \qquad \forall t \geq t_0.$$

Dans le reste de cette section nous allons introduire des conditions simple pour montrer la stabilité des points d'équilible pour les équations différentielles. On a la remarque suivante

Remarque 3.4. Si x^* est un point d'équibilbe de f, en posant $\tilde{u}(t) = u(t) - x^*$ et $g(x) = f(x + x^*)$ on se ramène au cas où $x^* = 0$.

Voici un théorème de stabilité dans le case linéaire. On rappelle que si A est une matrice carrée d'ordre d, alors on note par

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

L'ensemble $\sigma(A)$ est appelé spéctre de A. La borne spéctral de A est le nombre réel suivant

$$s(A) := \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Théorème 3.5. (Premier théorème de Lyapunov) *Soit A une matrice carrée d'ordre d. Alors on a équivalence entre les proriétés suivantes :*

(i) *Il existent des constante $\omega, M > 0$ tel que*

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

(ii) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{t \to +\infty} \|e^{tA}x\| = 0.$$

(iii) *La borne spéctrale de A satisfait*

$$s(A) < 0.$$

Démonstration. L'implication (i) implique (ii) est évidente. Montrons (ii) implique (iii). Par contraposition il suffit de montrer que non (iii) implique non (ii). Soit alors $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$, et soit $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ le vecteur propre associé à λ. Donc $Ax = \lambda x$. Ceci implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n x = \lambda^n x$. Donc en utilisant la définition de l'exponentielle d'une matrice vue dans le premier chapitre, on a

$$e^{tA}x = e^{\lambda t}x, \qquad \forall t \geq 0.$$

Ainsi

$$\|e^{tA}x\| = e^{\mathrm{Re}\lambda t}\|x\|.$$

Comme $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$, alors $\|e^{tA}x\|$ ne tend pas vers 0 quand $t \to +\infty$. Ce qui fallait démontrer. Montrons que (iii) implique (i). Le résultat découle facilement si A est diagonale ou si A est diagonalisable. Nous allons montrer le cas général, supposons que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$ avec $r < d$. C'est-à-dire on suppose qu'il a des vecteurs propre se répéte. D'après le théorème de Jordan, il existe un matrice inversible $P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et une matrice $\mathcal{J}$ diagonale par bloc tel que

$$A = P^{-1}\mathcal{J}P.$$

Ici $\mathcal{J} = \text{diag}(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \cdots, J_{\lambda_r})$, avec pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$, if n_i is the multiplicié de la valeur propre λ_i, alors le bloc de Jordan J_{λ_i} est la matrice carrée d'ordre n_i donnée par

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Le fait que $A^n = P^{-1}\mathcal{J}^n P$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (une simple réccurence), alors on a

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P^{-1}e^{t\mathcal{J}}P \\ &= P^{-1}\text{diag}(e^{tJ_{\lambda_1}}, \cdots, e^{tJ_{\lambda_r}})P \end{aligned}$$

avec

$$e^{tJ_{\lambda_i}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_i} & te^{t\lambda_i} & \cdots & \frac{t^{(n_i-1)}}{(n_i-1)!}e^{t\lambda_i} \\ 0 & e^{t\lambda_i} & te^{t\lambda_i} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{t\lambda_i} \\ 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda_i} \end{pmatrix}$$

On prend la norme de matrice, on trouve

$$\|e^{tJ_{\lambda_i}}\| \leq p_i(t)e^{t\text{Re}\lambda_i}$$

for tout $t \geq 0$, avec $p_i(t)$ est une fonction pôlynomiale de de degré $n_i - 1$. Comme $s(A) < 0$ alors on prend un $\omega \in]0, -s(A)[$. Donc pour tout $i = 1, 2, \cdots, r$ on a

$$\omega + \text{Re}\lambda_i < 0.$$

Remarquons que

$$\|e^{tJ_{\lambda_i}}\| \leq p_i(t)e^{t(\omega+\text{Re}\lambda_i)}e^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

De plus on a $p_i(t)e^{t(\omega+\text{Re}\lambda_i)} \to 0$ quand $t \to +\infty$. Ceci implique qu'il existe une constant $M_i > 0$ indépendante de t telle que

$$p_i(t)e^{t(\omega+\text{Re}\lambda_i)} \leq M_i, \qquad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $i = 1, 2, \cdots, r$, on a

$$\|e^{tJ_{\lambda_i}}\| \leq M_i e^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

On posons $\tilde{M} = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_r\}$, on a

$$\|e^{t\mathcal{J}}\| \leq \tilde{M}e^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Finallement, si on pose $M = \|P\|\|P^{-1}\|\tilde{M} > 0$, alors

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

$\square$

Remarque 3.6. On rappelle (voir chapitre I) que le problème de Cauchy linéaire suivant

$$(PC)_{0,x_0} \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

admet un unique solution globale sur $[0, +\infty[$ donnée par

$$u(t) = e^{tA}x_0, \qquad \forall t \geq 0.$$

Ici A est une matrice carrée d'ordre d, $\Omega = \mathbb{R}^d$, et $f(x) = Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On remarque que f est linéaire et donc $x^* = 0$ est un point d'équilibre de f. Le théorème 3.7 nous dit que le point d'équilibre 0 est exponentiellement stable si et seulement si les parties réelles des valeurs propres de la matrice A sont toutes négatives. D'où la stabilité dans le cas linéaire et basée sur la localisation des valeurs propres de la matrice A dans la partie gauche du plan.

Voici mainteanant un théorème de stabilité dans le cas non-linéaire.

Théorème 3.7. (Théorème de Lyapunov dans le cas non-linéaire) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1 sur Ω. Soit $x^* \in \Omega$ un point d'équilible de f. On pose $A = df(x^*)$ (la différentielle de f au point x^*). Si $s(A) < 0$ alors x^* est exponentiallement stable, relativement à l'équation différentielle*

$$u(0) = x_0, \quad \dot{u}(t) = f(u(t)), \qquad t \geq 0. \tag{Eq}$$

Démonstration. Vue la remarque 3.4, on peut supposer que $x^* = 0$, et donc $f(0) = 0$. En appliquant la formule de Taylor a l'ordre 1 au point 0, on a

$$f(x) = f(0) + df(0).x + g(x) = Ax + g(x)$$

où g est une fonction C^1 et

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0.$$

L'equation différentielle (Eq) peut s'écrire comme

$$u(0) = x_0, \quad \dot{u}(t) = Au(t) + g(u(t)), \qquad t \geq 0. \tag{Eq}$$

L'équation (Eq) admet une solution maximale unique $u \in [0, T^*[\to \mathbb{R}^d$. Par la même technique que dans une preuve d'un théorème dans le chapitre I, on a

$$u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(u(s))ds, \qquad \forall t \in [0, T^*[.$$

Nous allons démontrer deux choses. La première est ce cette solution est globle et la deuxième c'est que $\|u(t)\|$ est majoré par une fonction exponentielle qui décroit vers 0. Supposons que $T^* < +\infty$. Comme $s(A) < 0$, alors d'après le théorème 3.7, il existe deux constante $\omega, M > 0$ tels que

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

D'après la limite en haut, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \delta \Longrightarrow \|g(x)\| \frac{\omega}{2M} \|x\|.$$

Soit $\|x_0\| \leq \frac{\delta}{2}$ et posons

$$\Upsilon := \{c \in [0, T^*[: \|u(t)\| \leq \delta, \ \forall t \in [0, c]\}.$$

On a $t_0 \in \Upsilon$ car $\|u(t_0)\| = \|x_0\| \leq \frac{\delta}{2} \leq \delta$. De plus Υ est majoré par T^*. Donc $c^* = \sup \Upsilon$ existe. Supposons $c^* < T^*$. Il est evivent que Υ est un intervall. Donc $\Upsilon = [0, c^*[$. D'autre par on sait qu'il existe une suite $(c_n)_n \subset \Upsilon$ tel que $c_n \to c^*$ quand $n \to +\infty$. Comme $\|u(c_n)\| \leq \delta$ alors par continuité et pas passage à la limite on a aussi $\|u(c^*)\| \leq \delta$. Donc $\Upsilon = [0, c^*]$ comme u est continue sur $[0, c^*[$ et que $\|u(t)\| \leq \delta$ pour tout $t \in [0, c^*]$ alors cette propritée sera aussi vérifieé sur un petit interval à droit de c^*, c'est-à-dire il existe $\varepsilon > 0$ (petit) tel que $\|u(t)\| \leq \delta$ pout tout $t \in [0, c^* + \varepsilon]$. Ce qui conterdit la maximalité de c^*. Donc on a $T^* = c^*$, et

$$\|u(t)\| \leq \delta, \qquad \forall t \in [0, T^*[.$$

Ceci implique que $T^* = +\infty$. Et on a

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq Me^{-\omega t}\|x\|_0 + Me^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega s}\|g(u(s))\| ds \\
&\leq Me^{-\omega t}\|x\|_0 + Me^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega s}\frac{\omega}{2M}\|u(s)\| ds \\
&\leq Me^{-\omega t}\|x\|_0 + \frac{\omega}{2}e^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega s}\|u(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$e^{\omega t}\|u(t)\| \leq M\|x_0\| + \frac{\omega}{2}\int_0^t e^{\omega s}\|u(s)\| ds.$$

Par application du Lemma de Gronwall, on a

$$e^{\omega t}\|u(t)\| \leq Me^{\frac{\omega}{2}t}\|x_0\|, \qquad \forall t \geq 0.$$

Ainsi

$$\|u(t)\| \leq Me^{\frac{-\omega}{2}t}\|x_0\|, \qquad \forall t \geq 0.$$

□