UNIVERSITE IBN ZOHR

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques

AGADIR

TD d'Analyse 5

SMA3

$$Df(x).h = \langle \nabla f(x), h \rangle$$
$$\|f(x) - f(y)\| \leq \kappa \|x - y\|$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, \theta) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(t, \theta)$$

Année Universitaire 2018

Prof. Said Hadd

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Filière SMA3

Université Ibn Zohr, Agadir
A.U. 2017/2018
Prof. Said Hadd

Correction de TD1 d'Analyse 5

Exercice 1 : Sur $\mathbb{R}^n$ on définit les normes suivantes : pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Montrer que ces norems sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. D'une part, pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ on a

$$|x_k| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

D'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. D'autre part, comme $|x_k| \leq \|x\|_\infty$, pour tout k, alors $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$. Ainsi

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Ce qui montre que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
On a aussi

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

De même on $|x_k|^2 \leq \|x\|^2$. D'où $\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|^2$. D'où

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Ce qui montre que les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. En déduit aussi

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \leq n\|x\|_2.$$

On a alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_2.$$

Ce qui montre que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. □

Exercice 2 : On pose

$$x_m = \left(\frac{1}{1+m}, 1 + e^{-m} \right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

(1) Étudier la convergence de la suite $(x_m)_m$ dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

(2) Étudier la convergence de la suite $(x_m)_m$ dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$.

Démonstration. Comme $\frac{1}{1+m} \to 0$ et $1+e^{-m} \to 0$ quand $m \to \infty$. Donc la limite condidate est $(0, 1)$ pour toutes normes sur $\mathbb{R}^n$. En effet :

(1) Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ on a

$$\|x_m - (0,1)\|_\infty = \sup\{\frac{1}{1+m}, e^{-m}\} \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty).$$

(2) Pour la norm $\|\cdot\|_1 y$ on a

$$\|x_m - (0,1)\|_1 = \frac{1}{1+m} + e^{-m} \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty).$$

$\square$

Exercice 3 :

On note par E l'espace vectoriel des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang. Pour $u := (u_n)_n \in E$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{\in \mathbb{N}} |u_n|, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

(1) Vérifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

(2) Montrer que les $u \mapsto \|u\|_1$ et $u \mapsto \|u\|_\infty$ sont des normes sur E.

(3) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Démonstration. (1) On note par $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel de dimension infinie des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Donc on a $E \subset \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Il suffit donc de vérifier que E est un sous espace de $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. En effet, remarquons que la suite nulle $0 \in E$, donc $E \neq \emptyset$. Soint $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u, v \in E$. Il existe donc $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ et $v_n = 0$ pour tout $n \geq p$ et $n \geq q$. On pose $r = \max\{p, q\}$. Donc $u_n + \lambda v_n = 0$ pour tout $n \geq r$. Ainsi $u + \lambda v \in E$, et donc E est un sous-espace vectoriel. Montrons que $\dim E = \infty$. En effet, soit $B_n = \{u^1, u^2, \cdots, u^n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $u^k = (0, 0, \cdots, 1, 0, 0, \cdot)$ tel que le 1 est situé dans le k-ième place pour tout $k = 1, 2, \cdots, n$. Donc pour tout n, on a $B_n \subset E$, et donc $\dim E \geq \dim B_n$ pour tout n. D'autre part, il faut remarquer que la famille B_n est libre donc $\dim B_n = n$. Par suite $\dim E \geq n$ pour tout n. D'où $\dim E = \infty$.

(2) Soit $u \in E$ tel que $\|u\|_1 = 0$, donc pour tout k, on a $|u_k| \leq \|u\|_1 = 0$. Ce qui implique que $u_k = 0$ pour tout k. D'où $u = 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{\in \mathbb{N}} |\lambda||u_n| = |\lambda| \sum_{\in \mathbb{N}} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1.$$

Pour tout $u, v \in E$ et tout k, on a $|u_k + v_k| \leq |u_k| + |v_k|$. On passe à la somme dans les deux cotés on trouve $\|u + v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$. Ainsi $u \mapsto \|u\|_1$ est une norme sur E.

$\square$

Exercice 4 : Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}^n$ on a $\ell \in F$.

Démonstration. On rappelle que la partie F est fermée si et seulement si F coincide avec son adhéence, c'est-à-dire $F = \overline{F}$. Supposons qu'une suite $(x_m)_m$ de F converge vers un vecteur $\ell \in \mathbb{R}^n$. Par définition de la limite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $\|x_n - \ell\| < \varepsilon$, autrement dit $x_n \in B(\ell, \varepsilon)$ si $n \geq N$. Ce qui montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(\ell, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Ceci implique que $\ell \in \overline{F} = F$.
Inversement, il suffit de montrer que $\overline{F} \subset F$. Soit alors $x \in \overline{F}$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Ainsi si on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $B(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$. D'où pour tout n, il existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap F$. Ce qui implique que pour tout n, $x_n \in F$ et $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$. Donc $(x_n)_n \in F$ et $x_n \to x$. Par hypothèse on a $x \in F$. $\square$

Exercice 5 : On note par $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. On note par $O = (0,0)$ l'origine de $\mathbb{R}^2$ et on pose

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2, & \text{si les points } x, y, O \text{ sont alignés,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Montrer que l'application d définit une distance sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Dessiner la boule fermée de centre $x_0 = (0,2)$ et de rayon 3.

(3) On considère la suite $x_m = \left(1, \frac{1}{1+m}\right)$ de points de $\mathbb{R}^2$,. Montrer que la suite $(x_m)_m$ converge vers $x := (1,0)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, mais que $d(x_m, x)$ ne converge pas vers 0 quand $m \to \infty$.

Démonstration. (1) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.

— Si x, y, z et O sont alignés. Alors $d(x,y) = 0$ si et seulement si $\|x-y\|_2 = 0$ si et seulement si $x - y = 0$ si et seulement si $x = y$. De plus $d(x,y) = \|x-y\|_2 = \|y-x\|_2 = d(y,x)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} d(x,z) = \|x-z\|_2 = \|(x-y)+(y-z)\|_2 &\leq \|x-y\|_2 + \|y-z\|_2 \\ &\leq d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

— Si x, y, z et O ne sont pas alignés. Alors $d(x,y) = 0$ si et seulement si $\|x\|_2 + \|y\|_2 = 0$ si et seulement si $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 0$ si et seulement si $x = y = 0$. De plus $d(x,y) = \|x\|_2 + \|y\|_2 = \|y\|_2 + \|x\|_2 = d(y,x)$. D'autre part, $d(x,z) = \|x\|_2 + \|z\|_2 \leq \|x\|_2 + \|z\|_2 + 2\|y\|_2 = d(x,y) + d(y,z)$.

Ce qui montre que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit $z \in \overline{B}^d(x_0, 3)$, c'est-à-dire $d(x_0, z) \leq 3$.

— Si z, x_0 et O sont alignés. Alors on $\|z - x_0\|_2 \leq 3$ donc z appartient au segment $[(0,-1),(0,5)]$.

— Si z, x_0 et O ne sont pas alignés. alors $\|x_0\|_2 + \|z\|_2 = 2 + \|z\|_2 \leq 3$. ce qui donne $\|z\|_2 \leq 1$. Ainsi $z \in \overline{B}^{\|\cdot\|_2}(0,1)$.

Conclusion, $z \in \overline{B}^d(x_0, 3)$ si et seulement si $\in \overline{B}^{\|\cdot\|_2}(0,1) \cup [(0,-1),(0,5)]$.

(3) On a

$$\|x_m - x\|_2 = \frac{1}{1+m} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

Donc $x_m \to x$ quand $m \to \infty$ pour la norme $\|\cdot\|_2$. D'autre part, comme x, x_m et O ne sont pas alignés, alors

$$d(x_m, x) = \|x_m\|_2 + \|x\|_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{(1+m)^2}} + 1 \to 2 \quad (m \to \infty).$$

Donc la suite $(x_m)_m$ ne converge pas vers x pour la distance d.

$\square$

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Filière SMA3

Université Ibn Zohr, Agadir
A.U. 2017/2018
Prof. Said Hadd

Correction de TD2 d'Analyse 5

Exercice 1 :

(1) Montrer qu'une fonction constante est continue.

(2) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. montrer que $N : x \in \mathbb{R}^n \mapsto N(x) = \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. (1) Soit $f(x) = a \in \mathbb{R}^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où a est un vecteur donné dans $\mathbb{R}^n$. Comme $f(x) = f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors $f(x) \to f(y)$ quand $x \to y$. D'où la continuitè de f.

(2) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$N(x) = \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + N(y).$$

Donc $N(x) - N(y) \leq \|x - y\|$. D'autre part, comme x et y sont symètriques, alors on a aussi $N(y) - N(x) \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Ainsi

$$|N(x) - N(y)| \leq \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ce qui implique que N est une application Lipschtzienne, donc continue (voir aussi l'exercice 2).

□

Exercice 2 : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite K-Lipschitzienne ($K \in]0, +\infty[$) si

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

La nombre $K > 0$ est appelé la constante de Lipschitz associé à f. Montrer que f est uniformèment continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x - y\| \leq \eta$ on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \leq K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Ce qui implique que f est uniformèment continue sur $\mathbb{R}^n$.
Remarque : Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur D et il existe $K > 0$ tel que $|f'(t)| \leq K$ pour tout $t \in D$, alors f est uniformèment continue sur D. En effet, d'après le Théorème des Accroissements finis, il existe $c \in \mathrm{In}(D)$ tel que pour tout $t, s \in D$ on a $f(t) - f(s) = f'(c)(t - s)$. Donc $|f(t) - f(s)| = |f'(c)||t - s| \leq K|t - s|$ pour tout $t, s \in D$. Ainsi f est K-Lipschitzienne.
Si la constante de Lipschitz $K > 0$ de f vérifie $K \in]0, 1[$, alors on dit que f est contractante, ou une contraction (voir l'exercice 3 pour une application). □

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants, montrer que la conclusion du théorème du point fixe n'est pas vérifiée, puis expliciter l'hypothèse qui n'est pas satisfaite

(i) $\Omega =]0,1[$ et $f(x) = \frac{x}{2}$.

(ii) $\Omega = [0,1]$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Démonstration. (i) Pour tout $x, y \in \Omega =]0,1[$ on a

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x-y|.$$

Donc f est une contraction sur Ω. Supposons que f admet un point fixe $x_0 \in \Omega$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$, donc $\frac{1}{2}x_0 = x_0$, ce qui implique $x_0 = 0 \notin \Omega$. C'est absurde. L'hypothèse qui n'est pas satisfaite ici est la fermeture de Ω.

(ii) $\Omega = [0,1]$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Supposons qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = x$, alors $x^2 + 1 = x^2$. Ce n'est pas possible. L'hypothèse qui n'est pas satisfaite ici est $f(\Omega) \subset \Omega$.

$\square$

Exercice 4 : Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en $(0,0)$ pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine possible de $\mathbb{R}^2$) par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad h(x,y) = \frac{xy}{x+y}.$$

Démonstration. • Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Comme $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, et que $|\sin(\theta)| \leq 1$ et $|\cos(\theta)| \leq 1$, alors on a

$$|f(r\cos(\theta), r\cos(\theta))| \leq r^2 \to 0 \quad (r \to 0).$$

Ainsi la limite de f en $(0,0)$ est 0.

• Nous allons montrer que g n'admet pas de limite en $(0,0)$. Par l'absurde, supposons que f admet une limite ℓ en $(0,0)$. Donc pour toute suite $(u_n)_n \in \mathrm{Dom}(g)$ avec $u_n \to (0,0)$, on doit avoir $g(u_n) \to \ell$ quand $n \to \infty$. Considèrons les suites

$$u_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$g(u_n) = 0 \quad \text{et} \quad g(v_n) = \frac{1}{2}$$

On alors $u_n \to (0,0)$ et $v_n \to (0,0)$ quand $n \to \infty$, mais

$$\lim_{n\to\infty} g(u_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(v_n).$$

Absurde, donc g n'admet pas de limite en $(0,0)$.
• Supposons que h admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $(0,0)$. Alors comme la suite

$$w_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)$$

tend vers $(0,0)$ quand $n \to \infty$, alors $h(w_n) \to \ell$ quand $n \to \infty$. Mais

$$h(w_n) = n + \frac{1}{n} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Ce qui est absurde. Donc h n'admet pas de limite en $(0,0)$. □

Exercice 5 : Les limites suivantes existent-elles :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y3}{(x-1)^2+y^2}.$$

Démonstration. — On note

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{x-y}, \quad x \neq y.$$

On considère la suite

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

On a $u_n \to (1,1)$ quand $n \to \infty$. D'autre part,

$$\varphi(u_n) = \frac{n^2}{n-1} \to +\infty \qquad (n \to +\infty).$$

Ce qui montre que φ n'admet pas de limite en $(1,1)$.

— On pose

$$\psi(x,y) = \frac{y3}{(x-1)^2+y^2}.$$

Donc

$$|\psi(x,y)| = \frac{|y|^3}{(x-1)^2+y^2} \leq \frac{|y|^3}{y^2} = |y| \to 0 \quad ((x,y) \to (1,0)).$$

Ainsi $\psi(x,y)$ admit 0 comme limite quand $(x,y) \to (1,0)$.

□

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Filière SMA3

Université Ibn Zohr, Agadir
A.U. 2017/2018
Prof. Said Hadd

Correction de TD3 d'Analyse 5

Exercice 1 : On note

$$\Psi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \qquad (r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}.$$

On considère une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Maintenant on pose

$$g = f \circ \Psi.$$

(1) Montrer que g est une fonction différentiable de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

(2) Montrer que $\partial_r g(r,\theta)$ est égale à la dérivée de f au point (x,y) et dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, tandis que $\partial_\theta \tilde{f}(r,\theta)$ vaut r fois la dérivée de f au point (x,y) et dans la direction $\overrightarrow{u_\theta}$.

Démonstration. (1) Le deux composante de Ψ sont C^1, donc Ψ est de classe C^1. Et comme par hypothèse f est différentiable, alors g est différentiable comme composé de deux fonctions différentiable.

(2) On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = &\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial}{\partial r}(r\cos(\theta)) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial}{\partial r}(r\sin(\theta)).\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

D'autre part, on pose

$$h(t) = f(x + t\cos(\theta), y + t\sin(\theta)).$$

Remarquons que la dérivée de f au point (x,y) est exatement $h'(0)$. Mais

$$h'(0) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

D'où le résultat.

$\square$

Exercice 2 : Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles en tout point des fonctions définies par

$$f(x,y) = e^x\cos(y), \quad g(x,y) = \sqrt{1 + x^2y^2}, \quad h(x,y) = x^y \ (x > 0).$$

Démonstration. • La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin(y).$$

• La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

• Pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ on peut écrire

$$h(x,y) = e^{y\ln(x)}.$$

Donc h est différentiable sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}x^y = yx^{y-1},$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \ln(x)x^y..$$

$\square$

Exercice 3 : Calculer la dérivée de l'application

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

au point $a = (1,2)$ suivant le vescteur $v = (3,5)$.

Démonstration. On pose $\psi(t) = f(a+tv)$. Donc

$$\psi(t) = f(t+3t, 2+5t) = -3 - 16t^2 - 14t.$$

D'où $\psi'(t) = -32t - 14$ et $\psi'(0) = -14$.

$\square$

Exercice 4 : Déterminer en tout point de $\mathbb{R}^2$ le vecteur gradient de l'application

$$f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}.$$

Démonstration. Par définition du vecteur gradiant en a, on a

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xye^{-(x^2+y^2)}.$$

Ainsi

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)} \\ -2xye^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exercice 5 : Écrire la matrice jacobienne de l'application

$$f(x,y,x) = (xyz, x^2y + y).$$

Démonstration. Si on pose $f = (f_1, f_2)$ alors la jacobienne de f est donnée par

$$\begin{aligned} J_f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2xy & x^2+1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 6 : Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$f(x) = \langle u(x), x\rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Pour $x, h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle u(x+h), x+h\rangle = \langle u(x) + u(h), x+h\rangle \\ &= \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(h), h\rangle \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x+h) - f(x) = \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(h), h\rangle$$

D'autre part, l'inégalié de Cauchy-Schwartz nous donne

$$\frac{|\langle u(h), h\rangle|}{\|h\|} \leq \|u(h)\| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et sa différentielle est donnée par

$$Df(x).h = \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle.$$

Cas particulier : Soit $u(x) = x$, donc $f(x) = \|x\|^2$. Cette application est donc différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et sa différentielle est donnée par $Df(x).h = 2\langle x, h\rangle$. $\square$

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$|f(x)| \leq \|x\|^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que f est différentiable en 0 et déterminer $Df(0)$.

Démonstration. Remarquons que $|f(0)| \leq \|0\|^2 = 0$. donc $f(0) = 0$. Par suite

$$\left|\frac{f(0+h) - f(0)}{\|h\|}\right| = \left|\frac{f(h)}{\|h\|}\right| \leq \|h\| \to 0 \quad (\|h\| \to 0).$$

Ainsi f est différentiable en 0 et $Df(0) = 0$ (l'application nulle). □

Exercice 7 : Montrer que l'application $f(x) = \|x\|$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, n'est pas différentiable en 0.

Démonstration. Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et on pose $\varphi(t) = f(ta) = |t|\|a\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme la valeur absolue n'est pas dérivable en 0, alors φ n'est pas dérivable en 0. D'où f n'est différentiable en 0. □

Exercice 8 : (Existence des dérivées directionnelles n'implique pas la continuité)
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définit par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}, & x \neq 0, \\ y, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur et la calculer.

(2) Montrer que f n'est pas continue en 0.

Démonstration.

(1) On note $v = (x,y)$ avec $x \neq 0$ et soit $t \in \mathbb{R}^*$. Par définition de f on a $f(0,y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $f(0,0) = 0$ et on a alors

$$\frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tx,ty)}{t} = \frac{y^2}{x} \to \frac{y^2}{x} \quad (t \to 0).$$

Donc f admet des dérivés partielles suivant tout vecteur v.

(2) Montrons que f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, soit la suite

$$u_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) \quad (n \to \infty).$$

Un calcul simple montre que $f(u_n) = 1 \neq f(0,0)$. Ainsi f n'est pas continue en $(0,0)$.

□

Exercice 9 : Étudier sur $\mathbb{R}$ les extremums locaux et globaux des fonctions définies par

$$f(x,y) = x^4 + y^4, \quad g(x,y) = x^4 - y^4.$$

Démonstration. • La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Cherchons les points critiques de f. On a

$$\nabla f(x,y) = (4x^3, 4y^3).$$

Donc $\nabla f(x, y) = 0$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$. Ainsi $(0, 0)$ est le seule point critique de f. D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on a

$$f(x, y) > 0 = f(0, 0).$$

D'où f admet un minimum global (et donc en particulier local) strict en $(0, 0)$.
• Il est claire que g est C^∞ et que

$$\nabla g(x, y) = (4x^3, -4y^3).$$

Ainsi le seul point critique de g est $(0, 0)$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g(t, 0) = t^4 > g(0, 0) \quad \text{et} \quad g(0, t) = -t^4 < g(0, 0).$$

D'où g n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$. □

Exercice 10 : Étudier les extrema locaux et globaux de la fonction suivante

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Démonstration. Il est bien évident que f est de classe C^∞. De plus le gradient de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x).$$

Un simple calcul montre que les point critiques de f sont donc les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$. De plus

$$\det Hess(f)(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

Comme $\det Hess(f)(0, 0) = -9 < 0$, alors f admet un point selle en $(0, 0)$. D'autre part, comme $\det Hess(f)(1, 1) = 27 > 0$, et $\mathrm{Trace}(Hess(f)(1, 1)) = 6 > 0$, alors $(1, 1)$ est un minimum local de f. □

Exercice 11 : Soit $A \in \mathscr{M}_n$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

et continue, différentiable sur $\mathbb{R}^n$, convexe et admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que ce minimum est atteint au point $A^{-1}b$ (on note que A est inversible d'après les hypothèses).

Démonstration. Montrons que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^n$. En effet, soit une suite $(x_m)_n \in \mathbb{R}^n$ telle que $x_m \to x$. En particulier, cette suite est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout n. D'autre part,

$$\phi(x_m) - \phi(x) = \frac{1}{2}\langle A(x_m - x), x_m\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, x_m - x\rangle + \langle b, x_m - x\rangle.$$

En utilisant l'inégalitée de Cauchy-Schwartz on a

$$\|\phi(x_m) - \phi(x)\| \leq \left(\frac{M\|A\|}{2} + \|Ax\| + \|b\|\right) \|x_m - x\| \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

D'autre part, d'après l'Exercice 6, l'application $\psi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $D\psi(x).h = \frac{1}{2}(\langle Ax, h\rangle + \langle x, Ah\rangle) = \langle Ax, h\rangle$. D'autre part, l'application $\varrho(x) = \langle b, x\rangle$ est linéaire continue, donc différentiable et $D\varrho(x).h = \langle b, h\rangle$. Ainsi f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et

$$Df(x).h = D\psi(x).h - D\varrho(x).h = \langle Ax - b, h\rangle$$

En déduit que $\nabla f(x) = Ax - b$. Pour montrer que f est strictement convexe il suffit de vérifie que

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

En effet, comme A est définie positive alors $\langle Az, z\rangle > 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle = \langle A(x - y), x - y\rangle > 0.$$

Comme A est symétrique définie positive, alors il existe $c > 0$ tel que $\langle Ax, x\rangle \geq c\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ceci implique que

$$f(x) \geq c\|x\|^2 - \|b\|\|x\|.$$

D'où $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$. Donc f admet un unique minimum x_0. Ce minimum vérifie $\nabla f(x_0) = Ax_0 - b = 0$. Donc $x_0 = A^{-1}b$. □