UNIVERSITE IBN ZOHR

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques

AGADIR

TD d'Analyse 1 M1

SMA1-SMI1

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \gamma |x - y|^{\alpha}$$
$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$
$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Année Universitaire 2020–2021

Prof. Said Hadd

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021

Série 1 (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Exercice 1. Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $A \cup B$ est borné et que $\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$?
4. Soient $((A_i)_{i\in I})$ une famille quelconque de parties non vides, majorées de $\mathbb{R}$. On suppose que $A = \{\sup A_i / i \in I\}$ est majoré.
Montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est majoré et $\sup(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \sup(\sup A_i)$.
5. Peut-on avoir le résultat si A n'est pas majoré ?

Exercice 2
1. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}_+^* / \quad \exists\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2 / \quad x = m + n\sqrt{2}\}$. Montrer que inf $E = 0$. Considérer $x_0 = -1 + \sqrt{2}$ et montrer que $x_0^n \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $B = \{\sin(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{4}),\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que sup $B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\inf B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Soit A une partie de $\mathbb{R}^+$, non vide et majorée. $\sqrt{A} = \{\sqrt{x}, \quad x \in A\}$. Montrer que sup $\sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$.
4. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{| \ x - y \ |, \quad x, y \in A\}$. Justifier que B est majorée et montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice 3. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ / \ \ x^2 \leq 2\}$.
1. Montrer que A est une partie non vide et majorée dans $\mathbb{Q}^+$.
2. Soit a un majorant rationnel de A.
i. Montrer que $a^2 - 2 \neq 0$.
ii. Montrer que $a^2 - 2 > 0$.
iii. Soit r un rationnel telque $0 < r \leq \dfrac{a^2-2}{2a}$. Montrer que $a - r$ est aussi un majorant de A.

3. Conclusion

Exercice 4. Soit x un réel et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{E(x)+E(2x)+....+E(nx)}{n^2}$.
1. Donner un encadrement simple de $n^2 u_n$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
3. En deduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 5. Soit pour $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.

2) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ **b)** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+\sin x}$

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021

Corrigé de la série 1 (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Exercice 1. Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $A \cup B$ est borné et que $\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$?
4. Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de parties non vides, majorées de $\mathbb{R}$. On suppose que $A = \{\sup A_i / i \in I\}$ est majoré.
Montrer que $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est majoré et $\sup(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \sup(\sup A_i)$.
5. Peut-on avoir le résultat si A n'est pas majoré ?

Solution.

1. Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$, l'union $A \cup B$ est bien bornée et majorée par $\sup(\sup A, \sup B)$,donc $\sup(A \cup B) \leq \sup(\sup A, \sup B)$.
Montrons que $\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$, supposons que $\sup A \leq \sup B$, donc $\sup(\sup A, \sup B) = \sup B$.
D'après la définition de la borne supérieure on a

$$\forall \varepsilon > 0; \exists b \in B \text{ tel que } \sup B - \varepsilon \leq b.$$

Or $B \subset A \cup B$, d'où le résultat c-à-d $\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$.

2. On a un résultat analogue pour $\inf(A \cup B) \inf(\inf A, \inf B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$? non ce n'est pas vrai exemple si $A = [0, 1[$ et $B = [1, 2[$ on a $A \cap B = \varnothing$.
4. Soient $((A_i)_{i \in I})$ une famille quelconque de parties non vides, majorées de $\mathbb{R}$.
Si $A = \{\sup A_i / i \in I\}$ est majoré, A admet une borne supérieure notée $\sup A$.
Alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est bien majoré par $\sup A$. Montrons que $\sup(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \sup A$.
En effet $\forall \varepsilon > 0; \exists a \in A$ tel que $\sup A$ -$\frac{\varepsilon}{2} \leq a$, le fait que $a \in A$ =$\{\sup A_i / i \in I\}$, il existe alors $i_0 \in I$ tel que $a = \sup A_{i_0}$.

Donc il existe $\alpha \in A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ tel que a -$\frac{\varepsilon}{2} \leq \alpha$, on en déduit alors que

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \alpha \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ tel que } \sup A - \varepsilon \leq \alpha.$$

D'où le résultat souhaité.

5. Si A n'est pas majoré ? Alors le résultat précédant est faux. En effet si $A_i = \{0, 1, ..., i\}$ où $i \in \mathbb{N}$, $\sup A_i = i$ et $A = \mathbb{N}$.

Exercice 2

1. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}_+^* / \ \exists\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 / \ \ x = m + n\sqrt{2}\}$. Montrer que $\inf E = 0$.

2. Soit $B = \{\sin(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi}{4}),\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que $\sup B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\inf B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Soit A une partie de $\mathbb{R}^+$, non vide et majorée. $\sqrt{A} = \{\sqrt{x},\ \ x \in A\}$. Montrer que $\sup \sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$.

4. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{\mid x - y \mid,\ \ x, y \in A\}$. Justifier que B est majorée et montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$.

Solution.

1. Si $E = \{x \in \mathbb{R}_+^* / \ \exists\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 / \ \ x = m + n\sqrt{2}\}$, alors E est minoré par 0. Pour que $\inf E = 0$, il suffit de trouver une suite d'éléments de E qui converge vers 0.
Soit $a = -1 + \sqrt{2} \in E$ et on pose $x_n = a^n$, on vérifie aisément que $x_n \in E$ et que $(x_n)_n$ converge vers 0.

2. Si $B = \{\sin(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{4}),\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ pour $n \geq 2$ et comme la fonction sin est croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc pour $n \geq 2$ on a $\sin(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{4}) \in] - \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et pour $n = 1$ on a $\sin(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit que $\sup B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est minorant et en plus $\sin(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{4})$ tend vers $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\inf B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Si A est une partie de $\mathbb{R}^+$, non vide et majorée par M. Alors $\sqrt{A} = \{\sqrt{x},\ \ x \in A\}$ est aussi non vide majorée par $\sqrt{M}$. Montrer que $\sup \sqrt{A} \leq \sqrt{\sup A}$.
D'après la définition du sup A, on a $\forall \varepsilon > 0; \exists a \in A$ tel que $\sup A$ -$\varepsilon^2 \leq a$, donc $\sqrt{\sup A} \leq \sqrt{a + \varepsilon^2} \leq \sqrt{a} + \varepsilon$. D'où le résultat.

4. Si A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Alors la partie $B = \{\mid x - y \mid,\ \ x, y \in A\}$ est aussi bornée, donc majorée et que B admet une borne supérieure notée $\sup B$.
Pour tout $x, y \in A$ on a $x \leq \mid x - y \mid + y$, donc $x \leq \sup B + y$: $\forall (x, y) \in A^2$. par suite on a $\sup A \leq \sup B + \inf A$ (1).

D'après la définition du sup B, on a $\forall \varepsilon > 0; \exists (x, y) \in A^2$ tel que $\sup B$ -$\varepsilon \leq \mid x - y \mid$.
On peut supposer que $x \geq y$, donc $\sup B$ -$\varepsilon \leq x - y \leq \sup A - \inf A$ pour tout $\varepsilon > 0$. En faisant tendre ε vers 0 on obtient $\sup B \leq \sup A - \inf A$ (2). De (1) et (2) on obtient le résultat souhaité.

Exercice 3. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ / \ \ x^2 \leq 2\}$.

1. Montrer que A est une partie non vide et majorée dans $\mathbb{Q}^+$.

2. Soit a un majorant rationnel de A.
i. Montrer que $a^2 - 2 \neq 0$.
ii. Montrer que $a^2 - 2 > 0$.
iii. Soit r un rationnel telque $0 < r \leq \dfrac{a^2-2}{2a}$. Montrer que $a - r$ est aussi un majorant de A.

3. Conclusion
Solution.
1. A est une partie non vide et majorée par 2. En effet si alors $x^2 \leq 2 \leq 4$, donc $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \leq 0$. D'où $x \leq 2$.
2. Si a un majorant rationnel de A.

i. $a^2 - 2 \neq 0$ car a est rationnel.
ii. a n'appartient pas à A sinon il existe $b \in A$ tel que $a < b$ et ceci est absurde.
iii. Si r un rationnel telque $0 < r \leq \dfrac{a^2-2}{2a}$, alors pour tout $x \in A$ on a

$$x-(a-r) = x-a+r \leq x-a+\frac{a^2-2}{2a} = \frac{2ax-2a^2+a^2-2}{2a} = \frac{-(a-x)^2+x^2-2}{2a} \leq 0.$$

Donc $a - r$ est aussi un majorant de A.
3. Conclusion : La partie A n'admet pas de borne supérieure rationnelle.

Exercice 4. Soit x un réel et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{E(x)+E(2x)+....+E(nx)}{n^2}.$$

1. Donner un encadrement simple de n^2u_n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
3. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Solution.
1. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $E(x) \leq x < E(x)+1$. Donc

$$x[\frac{n(n+1)}{2}]-n = (x)-1+(2x)-1+....+(nx)-1 \leq n^2u_n \leq (x)+(2x)+....+(nx) = x[\frac{n(n+1)}{2}]$$

2. D'après ce qui précède on a $x[\dfrac{(n+1)}{2n}] - \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq x[\dfrac{(n+1)}{2n}]$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{x}{2}$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(x_n)_n$ donnée par

$$x_n = 2\frac{E(x) + E(2x) + ... + E(nx)}{n^2}$$

qui converge vers x.

Exercice 5. Soit pour $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.

2) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$

Solution.

1) $H_{2^{m+1}} - H_{2^m} = \sum_{k=2^m-1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \geq (2^{m+1} - 2^m)\frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}$

2) On en déduit que la suite $(H_n)_n$ n'est pas de Cauchy et puisque elle croit et positive donc $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ **b)** $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{3 + \sin x}$

Solution.

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$

b) $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{3 + \sin x} \leq \sqrt[n]{4}$, donc $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{3 + \sin x} = 1$

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021

Série 1 bis (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Exercice 1 :
1- Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \times x \;\in \mathbb{Q}$.
2- Soient r et $r\prime$ deux rationnels tels que $r < r\prime$. Montrer que $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r\prime - r) \notin \mathbb{Q}$.
3- En déduire qu'entre deux rationnels distincts il y a au moins un irrationnel.
Exercice 2 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[1, 2] \cap \mathbb{Q}, \quad [1, 2[\cap\mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \; \{(-1)^n + \frac{1}{n+1}\}$$

Exercice 3 : Soit I le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$I = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2\}$$

1- Montrer que I est la réunion de deux intervalles que l'on déterminera.
2- Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de ces intervalles.
Exercice 4 : Soient $a > 0$ et $b \geq 0$ deux réels.
1- Montrer que l'ensemble $S = \{n \in N : an > b\}$ est non vide et admet un plus petit élément que l'on notera p.
2- On pose $r = b - (p - 1)a$. Montrer que $r < a$.
3- En déduire que $\forall x > 0$ et $\forall y \geq 0$, il existe un couple $(q, r) \in N \times [0, x[$ tel que $y = qx + r$. Montrer que ce couple est unique.
Exercice 5 : Montrer que si K est un compact de $\mathbb{R}$ et F un fermé de $\mathbb{R}$ alors $K + F$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Soit $(v_n)_n$ une suite de nombres réel tel qu'ils existent des consantes $\gamma \in]0, 1[$ et $c > 0$ vérifiants

$$|v_{n+1} - v_n| \leq c\, \gamma^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(v_n)_n$ est une suite convergente.

Exercice 7 : Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue vérifiant

$$|g(t) - g(s)| < |t - s|, \qquad \forall t, s \in [a, b],\ t \neq s.$$

1) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in [a, b]$ solution de l'équation $g(x) = x$.

2) Soit la suite récurrente $v_0 \in [a, b]$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(|v_n - \lambda|)_{n\geq 0}$ est monotone et est convergente vers une limite μ.

3) Montrer qu'il existe une sous-suite $(v_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que $v_{\varphi(n)} \to \rho$ avec $\rho = \lambda + \mu$ ou $\rho = \lambda - \mu$.

4) Dans cette question on suppose que $\rho = \mu + \lambda$. En utilisant la question (1), montrer que $\mu = 0$ et que $v_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 8 : Soient f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, D_f son domaine de définition et A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $A = \{x \in D_f : f(x) > xo\}$.

1- DéterminerD_f.

2- Montrer que A admet une borne supérieure (on ne cherchera pas à la déterminer).

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > x$.

4- Montrer que A n'admet pas de plus grand élément.

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021

Série 1 bis (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Exercice 1 :
1) Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \times x \ \notin \mathbb{Q}$.
2) Soient r et $r\prime$ deux rationnels tels que $r < r\prime$. Montrer que $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r\prime - r) \notin \mathbb{Q}$.
3) En déduire qu'entre deux rationnels distincts il y a au moins un irrationnel.
Solution :
1) Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ supposons que $r + x = r' \in \mathbb{Q}$, alors $x = r' - r \in \mathbb{Q}$ absurde. Si $r \neq 0$, supposons que $rx = r' \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{r'}{r} \in \mathbb{Q}$ absude.
2) On sait que $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ et $r' - r \in \mathbb{Q}$. D'après 1) on a $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$.
3) Or $r < r\prime$, donc $x - r > 0$ et $x - r' = (r - r')(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) < 0$. Ainsi $x \in]r; r'[$ et $x \notin \mathbb{Q}$.
Exercice 2 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[1, 2] \cap \mathbb{Q}, \quad [1, 2[\cap \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \ \{(-1)^n + \frac{1}{n+1} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

Solution :
1) $A = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$ alors $A \subset [1, 2]$. L 'ensemble des minorants de A est $]-\infty, 1]$. L 'ensemble des majorants de A est $[2, \infty[$. Le $\sup(A) = 2 \in A$; 2 est le plus grand élément de A. $\inf(A) = 1 \in A$; 1 est le plus petit élément de A.
2) $B =]1, 2[\cap \mathbb{Q}$ alors $B \subset]1, 2[$. L 'ensemble des minorants de B est $]-\infty, 1]$. L 'ensemble des majorants de B est $[2, \infty[$. $\sup(B) = 2 \notin B$; B n'admet pas de plus grand élément. $\inf(B) = 1 \notin B$; B n'admet pas de plus petit élément.
3) L 'ensemble des minorants de $\mathbb{N}$ est $] - \infty, 0]$; $\inf(\mathbb{N}) = 0$ est le plus petit élément mais $\mathbb{N}$ n' est pas majoré.
4) $C = \{ \ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Alors C est borné car $C \subset [-1, 2]$. L 'ensemble des minorants de C est $] - \infty, -1]$. L 'ensemble des majorants de C est $[2, \infty[$. De plus $2 \in C(n = 0)$; $\sup(C) = 2$ car 2 est le plus grand élément de C. $\inf(C) = -1$.

En effet, $\forall x \in C$; on a $x \geq -1$ et d'après la propriété d'Archimède : $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Alors $(-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1} < \varepsilon + (-1)$.
D'après la caractérisation de la borne inférieure, on a $\inf(C) = -1$.
Exercice 3 : Soit I le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$I = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2\}$$

1) Montrer que I est la réunion de deux intervalles que l'on déterminera.
2) Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de ces intervalles.
Solution :
1) Le fait que $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x+1} > 0$ et $x \neq -1$, alors $\dfrac{x^2+x+2}{x+1} > 0$, comme $x^2+x+2 > 0$ car $\Delta < 0$, il suffit que $x+1 > 0$ c'est à dire $x > -1$.
Il faut résoudre les deux inéquations $\dfrac{x^2+x+2}{x+1} \geq 1$ et $\dfrac{x^2+x+2}{x+1} < 2$.
La première inéquation implique que $x \in (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[) \cap]-1, \infty[=]-1, 0] \cup [1, \infty[$.
La deuxième inéquation implique que $x \in]x_1, x_2[$ avec $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.
Alors $x \in]x_1, 0] \cup [1, x_2[$.
2) $\inf(I) = x_1$ et $\sup(I) = x_2$.
Exercice 4 : Soient $a > 0$ et $b \geq 0$ deux réels.
1- Montrer que l'ensemble $S = \{n \in N : an > b\}$ est non vide et admet un plus petit élément que l'on notera p.
2- On pose $r = b - (p-1)a$. Montrer que $r < a$.
3- En déduire que $\forall x > 0$ et $\forall y \geq 0$, il existe un couple $(q, r) \in N \times [0, x[$ tel que $y = qx + r$. Montrer que ce couple est unique.
Solution :
1- S est non vide car d'après la propriété d'Archimède, $\exists n_0 \in N$ tel que $\dfrac{b}{a} < n_0$. $S \subset \mathbb{N}$ donc S est minorée. Soit $p = \min(S)$; $p \geq 1$ (car $b \geq 0$).
2- $p - 1 \notin S \Rightarrow a(p-1) \leq b$. Posons $r = b - a(p-1) \geq 0$, $r - a = b - pa < 0$. D'où $0 \leq r < a$.
3- Posons $x = a, y = b$, $q = p-1$, $r = y - qx$ et $0 \leq r < x$.
Unicité : comme p est le minimum de S, $q = p - 1 \in \mathbb{N}$ est unique, on en déduit unicité de r.
Exercice 5 : Montrer que si K est un compact de $\mathbb{R}$ et F un fermé de $\mathbb{R}$ alors $K + F$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
Solution : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de$K + F$ qui converge vers un certain réel l.
Pour que $K + F$ soit fermé, il suffit de montrer que $l \in K + F$. En effet, il existe deux suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément respectivement de K et de F tels que pour tout

$n \in \mathbb{N}$ on a $x_n = k_n + f_n$. K étant compact donc la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(k_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un certain k dans K.
La suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de F tel que $f_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - k_{\varphi(n)}$ converge vers $l-k$, puisque F est fermé, alors $l-k \in F$. D'où $l \in K+F$.
Exercice 6 : Soit $(v_n)_n$ une suite de nombres réel tel qu'ils existent des consantes $\gamma \in]0,1[$ et $c > 0$ vérifiants

$$|v_{n+1} - v_n| \leq c\,\gamma^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(v_n)_n$ est une suite convergente.

Solution : Soient $n, p \in \mathbb{N}$, on a |

$$|v_{n+p} - v_n| = |v_{n+p} - v_{n+p-1} + v_{n+p-1} - v_{n+p-2+}\dots. + v_{n+1} - v_n|.$$

De l'inégalité triangulaire et de $|v_{n+1} - v_n| \leq c\,\gamma^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,on obtient

$$|v_{n+p} - v_n| \leq c \sum_{k=n}^{n+p-1} \gamma^k = c\gamma^n \frac{1-\gamma^p}{1-\gamma}$$

Puisque $\gamma \in]0,1[$, donc $\gamma^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. On en déduit alors que la suite $(v_n)_n$ est de Cauchy, puis elle converge.
Exercice 7 : Soit $g : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue vérifiant

$$|g(t) - g(s)| < |t-s|, \qquad \forall t, s \in [a,b],\ t \neq s.$$

1) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in [a,b]$ solution de l'équation $g(x) = x$.
2) Soit la suite récurrente $v_0 \in [a,b]$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(|v_n - \lambda|)_{n\geq 0}$ est monotone et elle converge vers une limite μ.
3) Montrer qu'il existe une sous-suite $(v_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que $v_{\varphi(n)} \to \rho$ avec $\rho = \lambda + \mu$ ou $\rho = \lambda - \mu$.
4) Dans cette question on suppose que $\rho = \mu + \lambda$. En utilisant la question (1), montrer que $\mu = 0$ et que $v_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$.

Solution :
1) On pose $f(x) = g(x) - x$, donc f est continue et $f(a) \times f(b) \leq 0$. D'après le TVI il existe $\lambda \in [a,b]$ tel que $f(\lambda) = 0$, d'où λ est une solution de l'équation $g(x) = x$.
La solution est unique car sinon il existe une autre solution μ de l'équation $g(x) = x$, or on a $|\lambda - \mu| = |g(\lambda) - g(\mu)| < |\lambda - \mu|$. Ceci est absurde.
2) Or $|v_{n+1} - \lambda| = |g(v_n) - g(\lambda)|$ et le fait que $|g(t) - g(s)| < |t-s|$ pout tout $t, s \in [a,b]$, alors $|v_{n+1} - \lambda| < |v_n - \lambda|$, donc la suite $(|v_n - \lambda|)_{n\geq 0}$ est décroissante. La suite étant minorée, elle converge vers un certain μ.

3) La suite $(|v_n - \lambda|)_{n\geq 0}$ étant bornée, donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est aussi bornée. D'après Bolzano-Weiristrass il existe une sous-suite $(v_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ qui vonverge vers un certain ρ. Or $|v_{\varphi(n)} - \lambda| \to |\rho - \lambda| = \mu$, donc $\rho = \lambda + \mu$ ou $\rho = \lambda - \mu$.
4) Si $\rho = \mu + \lambda$, or on a $|v_{\varphi(n)+1} - \lambda| = |g(v_{\varphi(n)}) - \lambda|$. La suite $(|v_{\varphi(n)+1} - \lambda|)_{n\geq 0}$ est une sous-suite de $(|v_n - \lambda|)_{n\geq 0}$ qui converge vres μ, la continuité de g nous assure que $\mu = |g(\rho) - \lambda| = |g(\rho) - g(\lambda)| < |\rho - \lambda| = |\mu|$. Donc $\mu = 0$ et que $v_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 8 : Soient f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, D_f son domaine de définition et A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $A = \{x \in D_f : f(x) > xo\}$.
1- DéterminerD_f.
2- Montrer que A admet une borne supérieure (on ne cherchera pas à la déterminer).
3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > x$.
4- Montrer que A n'admet pas de plus grand élément.
Solution :
1- La fonction$f$ est bien définie si et seulement si, $x(1-x) \geq 0$. Or $x(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,1]$. D'où $D_f = [0,1]$.
2- On a $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{4}\sqrt{3} > \frac{1}{4}$. Donc $A \neq \emptyset$. De plus $A \subset D_f$ est majorée par 1. En tant que partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, A admet donc une borne supérieure.
3- On a

$$\begin{cases} x \in [0,1] \\ \sqrt{x(1-x)} > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x(1-x) > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x(1-2x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0; \frac{1}{2}[$$

4- D'après la question précédente, on a $A =]0; \frac{1}{2}[$, donc $\sup A = \frac{1}{2}$. Si A avait un plus grand élément, il nserait égal à $\sup A = \frac{1}{2}$. Or $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2} \notin A$, donc A n'a pas de plus grand élément.

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021

Série 2 (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Exercice 1. On considère la fonction $g(x) = (x+1)^2(x-2)f(x)$ où f est la fonction par $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ si x est irrationnel.

a) Calculer les limites aux points -1 et 2 de g .

b) Calculer $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x \longrightarrow x_0} g(x)$ et $\lim\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ni x \longrightarrow x_0} g(x)$ pour tout réel $x_0 \neq -1$ et 2, conclure.

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n\ )_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n + \cdots + x - 1$. Montrer qu'il existe un seul nombre réel positif u_n tel que $f(u_n) = 0$ et que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Exercice 3. Soit f une fonction uniformément continue sur un intervalle $]a, b[$. On se propose de montrer que f possède un prolongement par continuité sur $[a, b]$.

a) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $]a, b[$ qui converge vers a. Montrer que la suite $(f(x_n))_n$ est convergente.

b) Montrer que la limite de la suite $(f(x_n))_n$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_n$.

c) En déduire que f possède une limite à droite de a.

d) En déduire que f possède un prolongement par continuité sur $[a, b]$.

Exercice 4. Soit f une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier n il existe un point $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = f(x + \dfrac{1}{n+1})$.

Exercice 5. Soit f une fonction continue de $[a, b[$. On suppose que $\lim\limits_{x\longrightarrow b} f(x) = +\infty$. Montrer que pour tout nombre réel $A > f(a)$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = A$.

Exercice 6. Soient $k \in]0, 1[$ et f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$| f(x) - f(x') | \leq k \mid x - x' |$$

pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = f(u_{n-1})$, pour $u_0 \in \mathbb{R}$ donné, est convergente et que sa limite u vérifie $u = f(u)$.

Exercice 7. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On pose

$$d(x, A) := \mathrm{Inf}\{|x-y|, y \in A\}$$

1) Montrer que $d(x, A)$ est bien définie.

2) Montrer que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ on a $|d(x, A) - d(x', A)| \leq |x - x'|$

3) En déduire que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mid x_n - x \mid = d(x, A).$$

5) Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

6) Montrer que si A est compact de $\mathbb{R}$, alors il existe $a \in A$ tel que $\mid a - x \mid = d(x, A)$.

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021

Corrigé de la série 2 (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Exercice 1. On considère la fonction $g(x) = (x+1)^2(x-2)f(x)$ où f est la fonction par $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ si x est irrationnel.
a) Calculer les limites aux points -1 et 2 de g .
b) Calculer $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\longrightarrow x_0} g(x)$ et $\lim\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ni x\longrightarrow x_0} g(x)$ pour tout réel $x_0 \neq -1$ et 2, conclure.
Solution :
a) Si f est la fonction par $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ si x est irrationnel, alors f est bornée et que $\mid f(x) \mid \leq 1$. Donc $\mid g(x) \mid \leq \mid (x+1)^2(x-2) \mid$, par suite $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$.
b) La limite $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\longrightarrow x_0} g(x)$ pour tout réel $x_0 \neq -1$ et 2 est égale à $\lim\limits_{x\to x_0}(x+1)^2(x-2) = (x_0+1)^2(x_0-2)$, la limite de $\lim\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ni x\longrightarrow x_0} g(x)$ pour tout réel $x_0 \neq -1$ et 2 est égale à 0. Puisque $x_0 \neq -1$ et 2, f n'est continue sur $\mathbb{R}\diagdown\{-1;2\}$
Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n\ )_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n + \cdots + x - 1$. Montrer qu'il existe un seul nombre réel positif u_n tel que $f(u_n) = 0$ et que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
Solution : Pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n(x) = x^n + \cdots + x - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$,de plus $f(0) \times f(1) \leq 0$. D'après le TVI il existe un seul nombre réel positif $u_n \in]0,1]$ tel que $f(u_n) = 0$. D'autre part $f_{n+1}(x) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x - 1$ est continue est $f_{n+1}(u_n) = {u_n}^{n+1} > 0$ et $f_{n+1}(0) < 0$, donc $u_{n+1} \in]0, u_n[$. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
Exercice 3. Soit f une fonction uniformément continue sur un intervalle $]a,b[$. On se propose de montrer que f possède un prolongement par continuité sur $[a,b]$.
a) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $]a,b[$ qui converge vers a. Montrer que la suite $(f(x_n))_n$ est convergente.
b) Montrer que la limite de la suite $(f(x_n))_n$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_n$.
c) En déduire que f possède une limite à droite de a.
d) En déduire que f possède un prolongement par continuité sur $[a,b]$.
Solution :
a) La fonction f étant uniformément continue sur un intervalle $]a,b[$,

$$\forall\varepsilon > 0; \exists\eta > 0 \text{ tel que } \forall(x,y) \in]a,b[^2 \mid x - y \mid < \eta \Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon.$$

Puisque la $(x_n)_n$ d'élements de $]a,b[$ qui converge vers a, donc de Cauchy, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq n_0$ on a $\mid x_n - x_m \mid < \eta$. On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq n_0 \text{ on a } \mid f(x_n) - f(x_m) \mid < \varepsilon,$$

donc la suite $(f(x_n))_n$ est convergente.

b) Montrons que la limite de la suite $(f(x_n))_n$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_n$.
En effet soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $]a,b[$ qui converge vers a, donc la suite $(x_n - y_n)_n$ converge vers 0, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$ on a $\mid x_n - y_n \mid < \eta$. On en déduit que $\forall \varepsilon > 0; \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$ on a $\mid f(x_n) - f(y_n) \mid < \varepsilon$, les deux suites $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ ont la même limite.

c) On en déduit que f possède une limite à droite de a donnée par $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$.

d) En faisant la même preuve pour la limite à gauche de b, on en déduit que f possède un prolongement par continuité sur $[a,b]$.

Exercice 4. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier n il existe un point $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = f(x + \dfrac{1}{n+1})$.

Solution : On pose $g(x) = f(x + \dfrac{1}{n+1}) - f(x)$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n} g(\frac{k}{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n+1} + \frac{1}{n+1}) - f(\frac{k}{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k+1}{n+1}) - f(\frac{k}{n+1}) = f(1) - f(0) = 0.$$

Il existe donc $k_0, k_1 \in \{0, 1, ..., n\}$ tels que $g(\dfrac{k_0}{n+1}) \times g(\dfrac{k_1}{n+1}) \leq 0$, comme la fonction g est continue d'après le TVI il existe $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = 0$

Exercice 5. Soit f une fonction continue de $[a,b[$. On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x) = +\infty$. Montrer que pour tout nombre réel $A > f(a)$, il existe $c \in [a,b[$ tel que $f(c) = A$.

Solution : Soit A nombre réel positif strictement supérieur à $f(a)$. le fait que $\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x) = +\infty$, alors il existe $\eta > 0$ tel que si $b - \eta < x < b$ alors $f(x) > A$. on pose $g(x) = f(x) - A$, donc g est continue sur $[a, b - \frac{\eta}{2}]$ et $g(a) \times g(b - \frac{\eta}{2}) < 0$. D'après le TVI il existe $c \in [a, b - \frac{\eta}{2}] \subset [a,b[$ tel que $g(c) = 0$. D'où le résultat.

Exercice 6. Soient $k \in]0,1[$ et f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mid f(x) - f(x') \mid \leq k \mid x - x' \mid$$

pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = f(u_{n-1})$, pour $u_0 \in \mathbb{R}$ donné, est convergente et que sa limite u vérifie $u = f(u)$.
Solution : La suite $(u_n)_n$ vérifie alors $\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq k \mid u_n - u_{n-1} \mid$ pour tout $n \geq 1$, par suite on a $\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq k^n \mid u_1 - u_0 \mid$. Donc pour $n, p \in \mathbb{N}$ on a
$\mid u_{n+p} - u_n \mid = \mid u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_{n+p-1} - u_{n+p-2} + ... + u_{n+1} - u_n \mid \leq \mid u_{n+p} - u_{n+p-1} \mid + ... + \mid u_{n+1} - u_n \mid$

$$\mid u_{n+p} - u_n \mid \leq k^n(k^{p-1} + k^{p-2} ...... + k + 1) \mid u_1 - u_0 \mid = k^n \mid u_1 - u_0 \mid \frac{1-k^p}{1-k}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ le terme $k^n \mid u_1 - u_0 \mid \dfrac{1-k^p}{1-k}$ tend vers 0. Donc la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy et par suite elle converge vers un certain u et comme f est continue alors $u = f(u)$.
Exercice 7. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On pose

$$d(x, A) := \text{Inf}\{|x - y|, y \in A\}$$

1) Montrer que $d(x, A)$ est bien définie.
2) Montrer que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ on a $|d(x, A) - d(x', A)| \leq |x - x'|$
3) En déduire que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid x_n - x \mid = d(x, A)$.
5) Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
6) Montrer que si A est compact de $\mathbb{R}$, alors il existe $a \in A$ tel que $\mid a - x \mid = d(x, A)$.

Solution :
1) Le fait que l'ensemble $\{|x-y|, y \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ la distance $d(x, A)$ est bien définie.
2) Pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ on a $|x-y| \leq |x-x'|+|y-x'|$, donc $d(x, A) \leq |x-x'|+|y-x'|$, en suite $d(x, A) - |x - x'| \leq |y - x'|$.
D'où $d(x, A) - |x - x'| \leq d(x', A)$, puisque x et x' jouent un rôle symétriques alors on a $|d(x, A) - d(x', A)| \leq |x - x'|$.
3) On en déduit de ce qui précède que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4) De la définition de la borne inférieure on a pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in A$ tel que $d(x, A) \leq |x - y| \leq d(x, A) + \varepsilon$.
Pour $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x, A) \leq |x - x_n| \leq d(x, A) + \dfrac{1}{n+1}$, donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid x_n - x \mid = d(x, A)$.
5) Si $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; \exists y \in A$ tel que $0 \leq |x-y| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0; .]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

6) Si A est compact de $\mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A admet une valeure d'adhérance $a \in A$, il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid x_{\varphi(n)} - x \mid = d(x, A) = \mid a - x \mid$.

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Année Universitaire 2020-2021

Série 3 (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Exercice 1. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} := \frac{1}{5}u_n^2 + \frac{4}{5}$ pour tout $n\in \mathbb{N}$.
1) on pose $f(x) := \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et étudier le signe de $f(x) - x$.
2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
4) Pour quelles valeurs de u_1 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle stationnaire ?
5) Si $u_1 > 4$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
6) Montrer que si $u_1 \in]1, 4[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
7) Montrer que si $u_1 \in]0, 1[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 1.

Exercice 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) := x \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.
1) Montrer que g est prolongeable par continuité en zéro.
2) Soit $f = \widetilde{g}$ le prolongement de g. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer à l'aide du Théorème des accroissements finis que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) \leq x$.
4) En déduire que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réccurente définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} := f(u_n)$ et $u_0 \in [0, 1]$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3. On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x|^x \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(0) = 1$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que $f'(x) = (1 + \ln|x|)e^{x\ln|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3) a) Montrer que f admet un maximum local et un minimum local, que l'on précisera, en deux points a et b.
b) Montrer que f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
4) Montrer que $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{e^{h\ln h} - 1}{h} = -\infty$ et en déduire que f n'est pas dérivable en 0.

5) On note g la fonction réciproque de f définie sur $[f(a), f(b)]$. la fonction g est elle dérivable en 1 ?

Exercice 4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = e^{-\left(\frac{x}{n}\right)} - 2(1-x)$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
3) Montrer que $f_{n+1}(x_n)$ est strictement positif et en déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
5) Montrer que $\left(-\dfrac{x_n}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
6) En déduire que $x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
3) Soit $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de f. Etudier la dérivabilité de $\widetilde{f}$ en 0.

.

Exercice 6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = a\sin x + 1$, où $a \in]-1,1[$ est une constante.
1) Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) = x_0$.
2) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$, tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$ on a : $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x-y|$.
3) On considère la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, on a $x_{n+1} = F(x_n)$.
a) Montrer que, $\forall n \geq 1$, on a $|x_{n+1} - x_0| \leq \alpha|x_n - x_0|$.
b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x_0.

Université Ibn Zohr *Année Universitaire 2020-2021*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
– Agadir–

Corrigé de la série 3 (Module Analyse 1)
–Section (SMA&SMI)–

Exercice 1. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} := \frac{1}{5}u_n^2 + \frac{4}{5}$ pour tout $n\in \mathbb{N}$.
1) on pose $f(x) := \frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}$. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et étudier le signe de $f(x)-x$.
2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
4) Pour quelles valeurs de u_1 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle stationnaire ?
5) Si $u_1 > 4$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
6) Montrer que si $u_1 \in]1, 4[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
7) Montrer que si $u_1 \in]0, 1[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 1.

Solution :
1) $f(x) - x = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5} - x = \frac{1}{5}(x^2 - 5x + 4) = \frac{1}{5}(x - 1)(x - 4) = 0$, donc $x = 1$ ou $x = 4$.
Le signe de $f(x) - x$ est positif si $x \in]-\infty; 1] \cup [4; +\infty[$ et négatif si $x \in [1; 4]$.
2) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, puisque f est continue, alors $f(x) = x$, par suite on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
3) On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(u_n^2 - u_{n-1}^2) = \frac{1}{5}(u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1})$ et puisque $u_n > 0$ pour $n \geq 1$.
Alors $u_{n+1} - u_n$ à le même signe que $u_2 - u_1$, il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
4) Les valeurs de u_1 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle stationnaire sont $u_1 = 1$ ou 4.
5) Si $u_1 > 4$, or $u_2-u_1 = \frac{1}{5}(u_1-1)(u_1-4) > 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante est non majorée car sinon la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 4 ceci est absurde car $u_n \geq u_1 > 4$ pour $n \geq 1$.
6) Si $u_1 \in]1, 4[$, alors $u_2 - u_1 = \frac{1}{5}(u_1 - 1)(u_1 - 4) < 0$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, elle converge forcément vers 1.

7) Si $u_1 \in]0,1[$ alors alors $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{5}(u_1-1)(u_1-4) > 0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, elle converge aussi vers 1.

Exercice 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) := x\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.

1) Montrer que g est prolongeable par continuité en zéro.
2) Soit $f = \widetilde{g}$ le prolongement de g. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer à l'aide du Théorème des accroissements finis que pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \le x$.
4) En déduire que $f([0,1]) \subset [0,1]$.
5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} := f(u_n)$ et $u_0 \in [0,1]$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution :
1) On sait d'après le TAF que $\dfrac{e^x-1}{x} = e^{\theta x}$ où θ est compris strictement entre 0 et 1. Donc la limite $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\theta x = 0$, par suite la fonction g est prolongeable par continuité en zéro.
Soit $f = \widetilde{g}$ le prolongement de g avec $f(0) = 0$.
2) Sur $\mathbb{R}^*$ la dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) := \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + x\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + \left(\frac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}\right)$$

et la dérivée de f au point 0 est donnée par la limite suivante : $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\theta x = 0$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour que f soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il suffit que la limite $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. En effet

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + \left(\frac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}\right) = 0 = f'(0).$$

3) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\dfrac{e^x-1}{x} = e^{\theta x}$ où θ est compris entre 0 et 1. Donc $\dfrac{e^x-1}{x} \le e$, on en déduit du fait que le logarithme est croissant que $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \le 1$.
D'où pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \le x$.
4) Si $x \in [0,1]$, alors d'après ce qui précède que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

5) Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} := f(u_n)$ et $u_0 \in [0,1]$. Alors d'après ce qui précède tous les $u_n \in [0,1]$ et du fait que $f(x) \leq x$, on a $u_{n+1} := f(u_n) \leq u_n$.
Par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers un certain l vérifiant $f(l) = l = l \ln\left(\dfrac{e^l - 1}{l}\right)$. Si $l \neq 0$, alors $\dfrac{e^l - 1}{l} = e = e^{\theta l}$, donc $\theta l = 0 \Longrightarrow l = 0$. Absurde, donc $l = 0$.

Exercice 3. On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x|^x \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(0) = 1$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que $f'(x) = (1 + \ln|x|)e^{x\ln|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3) a) Montrer que f admet un maximum local et un minimum local, que l'on précisera, en deux points a et b.
b) Montrer que f est une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
4) Montrer que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{e^{h\ln h} - 1}{h} = -\infty$ et en déduire que f n'est pas dérivable en 0.
5) On note g la fonction réciproque de f définie sur $[f(a), f(b)]$. la fonction g est-elle dérivable en 1 ?

Solution :
1) La fonction $f(x) = e^{x\ln|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$et que la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, f est bien continue sur $\mathbb{R}$. La limite $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ et la limite $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
2) La fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f'(x) = (x\ln|x|)' e^{x\ln|x|} = (1 + \ln|x|)e^{x\ln|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3)
a) La fonction dérivée f' s'annule au point $1 + \ln|x| = 0$, c'est aux points $a = -e^{-1}$ et $b = e^{-1}$.
b) La fonction f est croissante et continue sur $[a,b]$ et que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$, donc f est une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
4) La limite $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{e^{h\ln h} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} (1 + \ln h)e^{h\ln h} = -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0.
5) Soit g la fonction réciproque de f définie sur $[f(a), f(b)]$, la dérivée de g au point 1 est donnée par la limite suivante : $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{g(y) - 0}{y - 1}$, comme $y = f(x)$, alors

$$\lim_{y\to 1} \frac{g(y) - 0}{y - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{f(x) - f(0)} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(h) - f(0)}{h}\right)^{-1} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\ln h} - 1}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{e^{h\ln h}-1}{h} = -\infty$ et $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{e^{h\ln(-h)}-1}{h} = -\infty$, donc

$$g'(1) = \lim_{y\to 1} \frac{g(y)-0}{y-1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Exercice 4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = e^{-\left(\frac{x}{n}\right)} - 2(1-x)$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
3) Montrer que $f_{n+1}(x_n)$ est strictement positif et en déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
5) Montrer que $\left(-\dfrac{x_n}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
6) En déduire que $x = \dfrac{1}{2}$.

Solution :
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée de f_n est donnée par

$$f_n'(x) = -\frac{1}{n}e^{-\left(\frac{x}{n}\right)} + 2 \leq -\frac{1}{n} + 2 = \frac{2n-1}{n}$$

pour $x \in \mathbb{R}^+$. donc la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et que $f_n(0) \times f_n(1) = -1 \times e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} < 0$, d'après le TVI il existe alors un $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Puisque la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ le x_n est unique.
3) On a $f_{n+1}(x_n) = e^{-\left(\frac{x_n}{n+1}\right)} - 2(1-x_n)$, or $f_n(x_n) = 0 = e^{-\left(\frac{x_n}{n}\right)} - 2(1-x_n)$. Donc

$$f_{n+1}(x_n) = e^{-\left(\frac{x_n}{n+1}\right)} - e^{-\left(\frac{x_n}{n}\right)},$$

on remarque $\dfrac{x_n}{n+1} < \dfrac{x_n}{n}$ et comme l'exponentielle est strictement croissant, donc $f_{n+1}(x_n) > 0$. Or $f_{n+1}(0) \times f_{n+1}(x_n) < 0$, il existe un unique $x_{n+1} \in]0, x_n[$ tel que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée par 0, donc elle converge vres un certain x.
5) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant bornée, donc $\left(-\dfrac{x_n}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
6) Puisque $e^{-\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}-2(1-x_n)=0$, donc par passage à la limite on trouve $1-2(1-x)=0 \Longrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x^2e^{-\dfrac{1}{x^2}}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
3) Soit $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de f. Etudier la dérivabilité de $\widetilde{f}$ en 0.

Solution :
1) La fonction f est bien continue et dérivable sur sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est donnée par :

$$f'(x)=2e^{-\dfrac{1}{x^2}}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$$

2) La limite de f en 0 est donnée par : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, donc f est prolongeable par continuité en 0. Soit $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de f avec $\widetilde{f}\,(0)=0$.
3) La dérivabilité de $\widetilde{f}$ en 0 est donnée par :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0} xe^{-\dfrac{1}{x^2}}=0=\widetilde{f}\,'(0).$$

Exercice 6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=a\sin x+1$, où $a\in]-1,1[$ est une constante.
1) Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $F(x_0)=x_0$.
2) Montrer qu'il existe $\alpha\in]0,1[$, tel que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}$ on a : $|F(x)-F(y)|\leq \alpha|x-y|$.
3) On considère la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_1=1$ et, pour tout $n\geq 1$, on a $x_{n+1}=F(x_n)$.
a) Montrer que, $\forall n\geq 1$, on a $|x_{n+1}-x_0|\leq \alpha|x_n-x_0|$.
b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x_0.
Solution :
1) On a $f(x)=F(x)-x$, donc $f(0)=1$ et $f(\pi)=1-\pi<0$. Puisque f est continue, le TVI nous assure l'existence d'un réel $x_0\in]0;\pi[$ tel que $F(x_0)=x_0$.

2) Comme F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d'après le TAF il existe c compris entre x et y tel que :

$$F(x) - F(y) = F'(c)(x - y).$$

Or $F'(x) = a\cos x$, donc on a $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x - y|$, où $\alpha = a$.

3) On considère la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, on a $x_{n+1} = F(x_n)$.

a) D'après ce qui précède on a $|x_{n+1} - x_0| = |F(x_n) - F(x_0)| \leq \alpha|x_n - x_0|$, pour tout $n \geq 1$.

b) En réitérant l'inégalité précédant on trouve $|x_{n+1} - x_0| \leq \alpha^n|x_1 - x_0|$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$, donc la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x_0.