UNIVERSITE IBN ZOHR

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques

AGADIR

TD d'équations Différentielles

SMA6

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$
$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$
$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\lambda < 0,\ \forall \lambda \in \sigma_p(A)$$

Année Universitaire 2019-2020

Prof. Said Hadd

Département de Mathématiques — Université Ibn Zohr, Agadir
Faculté des Sciences — A.U. 2019/2020
Filière SMA6 — Prof. Said Hadd

Corrigé de TD1 d'équations différentielles (SMA6)

Exercice 1 : Soit $f = (f_1, f_2, \cdots, f_d) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue, tel qu'il existe une fonction continue $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $R > 0$ avec

$$\sum_{k=1}^{d} x_k f_k(t,x) \leq \psi(t)\|x\|^2, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \geq R. \tag{S}$$

Montrer que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, toute solution maximale du problème de Cauchy

$$u(t_0) = x_0, \quad \dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0$$

est définie sur $[t_0, +\infty[$ (c-à-d solution globale).

Démonstration. Comme le champ de vecteurs f est continu, alors d'après le théorème de Peano la solution maximale $u : [0, T^*[\to \mathbb{R}^d$ existe. Montrons que cette solution est globale, c'est à dire montrons que $T^* = +\infty$. Par l'absurde, on suppose que $T^* < +\infty$. Donc d'après le théorème d'explosion on a

$$\lim_{t \to T^*} \|u(t)\| = +\infty.$$

Ce qui implique que il existe $\delta > 0$ tel que

$$t \in [T^* - \delta, T^*[\Longrightarrow \|u(t)\| \geq R.$$

D'autre part comme u est dérivable sur $[t_0, T^*[$, alors la fonction $t \in [t_0, T^*[\mapsto \|u(t)\|^2$ est différentiable et on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u(t)\|^2 &= \langle u(s), \dot{u}(s) \rangle \\ &= \langle u(s), f(s, u(s)) \rangle \end{aligned}$$

Or for tout $t \in [T^* - \delta, T^*[$, et pour tout $s \in [\delta^*, t]$ (avec $\delta^* = T^* - \delta$) on a $\|u(s)\| \geq R$. Donc d'après la relation (S), on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u(s)\|^2 \leq \psi(s)\|u(s)\|^2.$$

En intégrant entre δ^* et t on obtient

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(\delta^*)\|^2 + 2\int_{\delta^*}^{t} \psi(s)\|u(s)\|^2 ds, \quad \forall t \in [\delta^*, T^*[.$$

Maintenant, par le lemme de Gronwall on a

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(\delta^*)\|^2 \exp\left(2\int_{\delta^*}^{t} \psi(s) ds\right)$$

Si on pose

$$\kappa^* := \|u(\delta^*)\| \exp\left(\int_{\delta^*}^{T^*} \psi(s) ds\right),$$

alors

$$\|u(t)\| \leq \kappa^*, \qquad \forall t \in [\delta^*, T^*[.$$

Ce qui est absurde. $\square$

Exercice 2 : Soit A une matrice carrée d'ordre d tel que toute valeur propre λ de A vérifie $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Soit $(B(t))_{t\geq 0}$ une famille de matrices carrées telles que $t \mapsto B(t)$ est continue et que

$$\beta := \int_0^\infty \|B(t)\| dt < +\infty.$$

Soit le problème de Cauchy

$$\dot{u}(t) = Au(t) + B(t)u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = x_0.$$

Montrer que ce problème de Cauchy admet une solution gloable unique $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ qui satisfait

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t)\| = 0.$$

Démonstration. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$f(t,x) = Ax + B(t)x.$$

Cette fonction est continue car, pour tout (t,x) et (s,y) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(s,y)\| &\leq \|A\|\|x-y\| + \|B(t)x - B(s)y\| \\ &\|A\|\|x-y\| + \|B(t)x - B(t)y\| + \|B(t)y - B(s)y\| \\ &\leq (\|A\| + \|B(t)\|)\|x-y\| + \|B(t) - B(s)\|\|y\|. \end{aligned}$$

En utilisant la contiuité de $\sigma \mapsto \|B(\sigma)\|$ on a $f(t,x) \to f(s,y)$ quand $(t,x) \to (s,y)$. Ce qui montre que f est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Donc d'après le théorème de Peano, le problème de Cauchy admet au moins une solution maximale $u : [0, T^*[\to \mathbb{R}^d$.
Montrons que cette solution est globale. En effet, soit K un compact de $\mathbb{R}^+$ et on pose

$$\gamma := \sup_{t\in K} \|B(t)\|.$$

Donc pour tout $(t,x) \in K \times \mathbb{R}^d$, on a

$$\|f(t,x)\| \leq (\|A\| + \gamma)\|x\|.$$

Ainsi d'après un lemme dans le cours (juste après le théorème d'explosion) la solution est globale (i.e. $T^* = +\infty$).
En applique la même méthode que dans un résultat dans le cours, cette solution est donnée par la formule de la variation de constantes suivantes

$$u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)u(s) ds, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

D'autre part, comme toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle négative, alors d'après le théorème de Lyapunov, ils existent deux constantes $M, \omega > 0$ tels que

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

D'où

$$\|u(t)\| \leq Me^{-\omega t}\|x_0\| + Me^{-\omega t}\int_0^t \|B(s)\| \left(e^{\omega s}\|u(s)\|\right) ds.$$

En déduit que

$$e^{\omega t}\|u(t)\| \leq M\|x_0\| + M\int_0^t \|B(s)\| \left(e^{\omega s}\|u(s)\|\right) ds.$$

Maintenant, le lemme de Gronwall implique que

$$e^{\omega t}\|u(t)\| \leq M \exp\left(M\int_0^t \|B(s)\|ds\right).$$

Ce qui implique que

$$\|u(t)\| \leq Me^{\beta M}e^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Ainsi

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t)\| = 0.$$

□

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue, localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(t+T, x) = f(t, x)$ (la fonction $f(\cdot, x)$ et T-périodique pour tout $x \in R$). Soit l'équation

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)). \tag{E}$$

On suppose que (E) admet une solution $(u, \mathbb{R})$ avec u boronée sur $\mathbb{R}$. On se propose de montrer que (E) admet une solution T-périodique. Pour cela, on définit une suite de fonctions par

$$u_n(t) = u(t + nT), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1) Si $u_1 - u_0$ s'annule en un point de $\mathbb{R}$, montrer que u est T-périodique.

(2) Si $u_1 - u_0$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elle y reste de signe constant (par continuité). On suppose donc que $u_1 - u_0$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Montrer alors l'existence d'une fonction $u_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $u_n(t) \to u_\infty(t)$ et que u_∞ est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que la suite de fonction $(u_n)_n$ converge vers u_∞ uniformément sur les compact de $\mathbb{R}$, puis que u_∞ est solution de (E).

Démonstration. Avant de commencer il faut remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est solution de (E). En effet, on a u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car c'est le composé de fonctions dérivables. De plus on a

$$\dot{u}_n(t) = \dot{u}(t+nT) = f(t+nT, u(t+nT)) = f(t, u_n(t))$$

pout tout $t \in \mathbb{R}$, car f est T-périodique.

(1) Supposons d'il existe un $t_0 \in R$ tel que $u_0(t_1) = u_1(t_0)$. Comme $(u_0, \mathbb{R})$ et $(u_1, \mathbb{R})$ sont deux solutions qui coincide en un point, alors d'après le théorème d'uncité global ces deux solutions coincides sur l'intersection de leurs domaines de définition qui est $\mathbb{R}$. Ce qui implique que $u(t) = u_0(t) = u_1(t) = u(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci peuve que u est T-périodique.

(2) Si la fonction $u_1 - u_0$ ne s'annule pas, alors elle garde un signe constant, par exemple $u_1 > u_0$. Montrons que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n(t))_n$ est strictement croissante. En efft, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= u(t+(n+1)T) = u((t+nT)+T) \\ &= u_1(t+nT) > u_0(t+nT) = u(t+nT) = u_n(t). \end{aligned}$$

Montrons que $(u_n(t))_n$ est bornée. Par hypothèse on a u est bornée sur $\mathbb{R}$. Donc il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ on a$\|u(\sigma)\| \leq M$. Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|u_n(t)\| = u(t+nT)\| \leq M.$$

Alors la suit $(u_n(t))_n$ est bornée, donc convergente vers un réel $u_\infty(t)$. Montrons que la fonction $u_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$u_{n+1}(t) = u_n(t+T).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve

$$u_\infty(t) = u_\infty(t+T), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(3) Pour montrer que la suite de fonction $(u_n)_n$ converge uniformémént sur les compact, il faut utiliser le théorème d'Ascoli. Et donc il faut montrer que cette suite est à la fois équicontinue et équibornéé. On a déjà vue en haut que il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|u_n(t)| \leq M$. Ce qui signifie que $(u_n)_n$ est équibornée. En rappel que si g est une fonction réelle et T-périodique, alors on a $g(\mathbb{R}) = g([0,T])$. En applique ce résultat. On a

$$\dot{u}_n(t) = f(t, u(t+nT)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc comme $u(\mathbb{R}) \subset [-M, M]$, alors

$$\dot{u}_n(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R} \times u(\mathbb{R})) \subset f([0,T] \times [-M, M]).$$

Puisque $[0,T] \times [-M, M]$ est compact et que f est continue, alors $f([0,T] \times [-M, M])$ est compact de $\mathbb{R}$; donc bornée. Ainsi $\dot{u}_n(\mathbb{R})$ est borné. C'est à dir, il existe $\kappa > 0$

tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\dot{u}_n(t)| \leq \kappa$. Par l'ingalité des acroissement finis, on a pout tout n et pour tout t, t',

$$|u_n(t) - u_n(t')| \leq \kappa |t - t'|.$$

Ceci implique que $(u_n)_n$ est équicontinue. Donc elle converge uniformément vers u_∞. D'autre par, en utilisant le fait que f est localement lipschitzienne, on peut montrer que $f(\cdot, u_n(\cdot))$ converge uniformément vers $f(\cdot, u_\infty(\cdot))$. Donc en passe a la limite dans la formule

$$u_n(t) = u_(0) + \int_0^t f(s, u_n(s)) ds,$$

on trouve

$$u_\infty(t) = u_(0) + \int_0^t f(s, u_\infty(s)) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $(u_\infty, \mathbb{R})$ est une solution de l'equation (E) qui est T-périodique.

$\square$

Département de Mathématiques — Université Ibn Zohr, Agadir
Faculté des Sciences — A.U. 2019/2020
Filière SMA6 — Prof. Said Hadd

TD d'équations différentielles (SMA6)

1. Problème I : Utilisation du théorème de Peano pour démontrer la surjectivité des applications

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\langle f(x) - f(y), x - y\rangle \ \geq C\|x - y\|^2, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{H}$$

On se propose de démontrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui même. A cet effet, on considére l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = -f(u(t)), \qquad t \geq 0. \tag{Eq}$$

(1) Soient u et v deux solutions de l'équation (Eq) définies sur $[0, T]$, où $T > 0$. Donner une majoration de $\|u(t) - v(t)\|$

(2) En déduire que

$$\forall t \in [0, T], \qquad \|\dot{u}(t)\| \leq \|\dot{u}(0)\|e^{-Ct}.$$

(3) Soit u une solution maximale du problème de Cauchy

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(t) = -f(u(t)), \quad t \geq 0.$$

Montrer que u est définie sur $\mathbb{R}^+$ (solution globale), et admet une limite finie ℓ en $+\infty$ telle que $f(\ell) = 0$.

(4) Conclure.

Démonstration. **(1)** Soit $u, v : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de (Eq). On pose $\varphi = \|u - v\|^2$, alors φ est dérivable sur $[0, T]$. Comme pour tout $t \in [0, T]$ on a $u(t) = -f(u(t))$ et $v(t) = -f(v(t))$, alors d'après l'inégalitée (H), pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= 2\langle u(t) - v(t), \dot{u}(t) - \dot{v}(t)\rangle \\
&= -2\langle u(t) - v(t), f(u(t)) - f(v(t))\rangle \\
&\leq -2C\|u(t) - v(t)\|^2 \\
&\leq -2C\varphi(t).
\end{aligned}$$

Par mutliplication des deux cotés de cette inégalitée par e^{2Ct},

$$e^{2Ct}\varphi'(t) + 2Ce^{2Ct}\varphi(t) \leq 0.$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{ds}\left(e^{2Cs}\varphi(s)\right) \leq 0.$$

Par integration entre 0 et t, on a

$$\varphi(t) = \|u(t) - v(t)\|^2 \leq \|u(0) - v(0)\|^2 e^{-2Ct}, \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{H1}$$

Ainsi

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(0) - v(0)\| e^{-Ct}, \qquad \forall t \in [0, T].$$

(2) Soit u une solution de (Eq) et fixons $s \in [0, T]$. On définie une function $v; [0, T-s] \to \mathbb{R}^n$ par $v(t) = u(t+s)$ pour tout $t \in [0; T-s]$. La fonction v est dérivable car c'est le composé de u et la fonction $t \mapsto t+s$. De plus on a $\dot{v}(t) = \dot{u}(t+s) = -f(u(t+s)) = -f(v(t))$. Donc v est aussi une solution de (Eq). Par application l'inégalité (H1) on a

$$\|u(t+s) - u(t)\| \leq \|u(s) - u(0)\| e^{-Ct}, \qquad \forall t \in [0, T-s].$$

Maintenant on fait varié à la fois $s \in]0, T[$ et $t \in [0, T-s]$, puis en dévise par s dans l'inégalitée dérnière on obtient

$$\left\| \frac{u(t+s) - u(t)}{t} \right\| \leq \left\| \frac{u(s) - u(0)}{t} \right\| e^{-Ct}, \qquad \forall t \in [0, T-s].$$

En faisant tendre $s \to 0$, il vient la majoration désirée.

(3) Soit $u : [0, T[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale du problème de Cauchy. Supposons que $T < +\infty$, donc par le théorème d'explosion (voir le polycope du cours sur le site de FSA Moodle), alors il existe un $\delta > 0$ tel que u n'est pas bornée sur $[T-\delta, T[$. Comme $u(0) = 0$, alors pour tout $t \in [0, T[$, on a

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \left\| \int_0^t \dot{u}(s) ds \right\| \leq \int_0^t \|\dot{u}(s)\| ds \\
&\leq \int_0^t \|\dot{u}(0)\| e^{-Cs} ds \\
&\leq \frac{\|\dot{u}(0)\|}{C} := \kappa, \qquad \forall t \in [0, T[.
\end{aligned}$$

Donc u est bornée sur $[0, T[$, ce qui est absurde. Donc $T = +\infty$. D'autre part, puisque $\|\dot{u}(t)\| \leq \|\dot{u}(0)\| e^{-Ct}$, alors

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{u}(s)\| ds < \infty.$$

Soit $(t_n)_n$ tel que $t_n \to +\infty$, alors

$$\|u(t_n)\| \leq \int_0^{t_n} \|\dot{u}(s)\| ds, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite $(x(t_n))$ est bornée, elle admet donc une sous suite convergente, i.e. $u(t_{n_k}) \to \ell \in \mathbb{R}^n$ quand $k \to +\infty$. Ceci implique que $u(t) \to \ell$ quand $t \to +\infty$. D'après la convergence de l'integral généralisée en haut, on a $\|\dot{u}(t)\| \to 0$ quand $t \to +\infty$. Or on sait que $\dot{u}(t) = -f(u(t))$, alors en faisant tendre $t \to +\infty$ dans les deux cotés et en utilisant la continuité de f, on obtient $f(\ell) = 0$.

(4) Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et posons $g(x) = f(x) - y$. Alors la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^n$ et satisfait la condition (H). Donc d'après la question (3) il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(\ell) = 0$, c'est-à-dire que $f(\ell) = y$. Ainsi f est surjective. Compte tenu de (H), f est aussi injective, donc f est une bijection de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. En utilisant la condition (H) et l'inégalitée de Cauchy Schwartz, on a

$$\|x - y\| \leq \frac{1}{C}\|f(x) - f(y)\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ceci impliqre que

$$\left\|f^{-1}(x) - f{-1}(y)\right\| \leq \frac{1}{C}\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

D'où f^{-1} est Lipschtzienne, donc continue. On conclu que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui même. □

2. Problème II : Solution globale à droite et strictement maximale à gauche

Soient F une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$u(t_0) = x_0, \qquad \dot{u}(t) = -\nabla F(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{PC}$$

Ici le gradient de la fonction F est

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_d}\right)^\top.$$

On suppose que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty. \tag{H}$$

(1) Vérifiez que le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique $u :]T_*, T^*[\to \mathbb{R}^d$.

(2) Montrer que la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante. En déduire que $T^* = +\infty$.

(3) En considérant le cas $n = 1$ et $F(x) = \frac{x^4}{4}$ montrer que l'on peut avoir $T_* > -\infty$.

Démonstration. **(1)** On pose $f(x) = -\nabla F(x)$ for $x \in \mathbb{R}^d$. Donc le problème de Cauchy (PC) peut s'écrire sous la forme standrad du cours, $\dot{u}(t) = f(u(t))$. Comme F est de classe C^2 alors f est de classe C^2, donc localement lipschitzienne. D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz le probème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique $u :]T_*, T^*[\to \mathbb{R}^d$.

(2) La fonction $t \mapsto F(u(t))$ est dérivable et on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(u(t)) &= Df(u(t)) \cdot \dot{u}(t)\\ &= \langle \nabla F(u(t)), \dot{u}(t)\rangle\\ &= \langle \nabla F(u(t)), -\nabla F(u(t))\rangle\\ &= -\|\nabla F(u(t))\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que l'application $t \mapsto F(u(t))$ est décroissante, en particulier

$$F(u(t)) \leq F(x_0), \qquad \forall t \geq t_0.$$

D'autre part, supposons par l'absurd que $T^* < +\infty$. Donc d'après le théorème de l'explosion, on a $\|x(t)\| \to +\infty$ quand $t \to T^*$. Donc, par (H), on a auusi $F(x(t)) \to +\infty$ quand $t \to T^*$. Ceci est une contraduction vue que $F(u(t))$ est bornée à droite de t_0. Ainsi $T^* = +\infty$.

(2) Soit $F(x) = \frac{x^4}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc le problème de Cauchy devient

$$\dot{u}(t) = -(u(t))^3, \quad u(0) = x_0 \neq 0.$$

Comme $F(x) \to +\infty$ quad $|x| \to +\infty$, alors d'après la réponse de la question **(2)**, il existe une solution maximale $u :]T_*, +\infty[\to \mathbb{R}$ du problème de Cauchy (PC) (car on a montrer que $T^* = +\infty$). De plus on a $T^* < 0$. Montrons que $u(t) \neq 0$ pour tout $t \in]T_*, +\infty[$. Supposons qu'il existe $t_1 \in]T_*, +\infty[$ tel que $u(t_1) = 0$. Comme $(u,]T_*, +\infty[)$ et $(0,]T_*, +\infty[)$ (ici 0 est la solution nulle) sont solution de $\dot{u}(t) = -(u(t))^3$ et que $u(t_1) = 0(t_1) = 0$ alors par the théorème d'unicité globale on a aussi $u(t) = 0$ pout tout $t \in]T^*, +\infty[$, ce qui contredit le fait que $u(0) = x_0 \neq 0$. Par suite, u est nuon nulle sur $]T_*, +\infty[$. On peut donc écrire, pout tout $t \in]T_*, +\infty[$,

$$\frac{\dot{u}(t)}{u^3(t)} = -1.$$

En intégrant entre t et 0 ($t \in]T_*, 0]$), on obtient,

$$\left[\frac{1}{2u^2(s)}\right]_t^0 = -t$$

This implies that

$$\frac{1}{2u^2(t)} = t + \frac{1}{2x_0^2}.$$

Donc forcément $t > -\frac{1}{2x_0^2}$ (inégalié strict car u est non nulle). Par suite la solution est définie sur $]-\frac{1}{2x_0^2}, +\infty[$ et donnée par

$$u^2(t) = \frac{x^2}{1 + 2x_0^2 t}, \qquad \forall t > -\frac{1}{2x_0^2}.$$

Finalement on a $T_* = -\frac{1}{2x_0^2} > -\infty$. $\square$

3. Problème III : Les solutions explicites des solution des équations différentielles non-linéaires

Soit le problème de Cauchy suivant

$$u(0) = 0, \qquad \dot{u}(t) - \sin(u(t)) = 1. \tag{PC1}$$

(1) Montrer que (PC1) admet une solution maximale unique $u :]T_*, T^*[\to \mathbb{R}$ (ici $T_* < 0 < T^*$).

(2) Montrer que u est croissante sur I et qu'il existe $\bar{t} > 0$ tel que

$$1 + \sin u(t) > 0, \quad \forall t \in [0, \bar{t}].$$

En déduire que $u(t) \in [0, \frac{3\pi}{2}[$ pour tout $t \in [0, \bar{t}]$.

(3) En intégrant (PC1) sur $[0, \bar{t}]$, déterminer l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in [0, \bar{t}]$. On rappelle que $1 + \sin x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$.

(4) Déduire que la solution est définie sur $\mathbb{R}$ (solution globle) et donner l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(5) Soit maintenant le problème de Cauchy

$$u(t_0) = x_0, \quad \dot{u}(t) - \sin u(t) = 1, \tag{PC2}$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Déduire des questions précedente que la solution maximale du problème de Cauchy (PC2) est définie sur $\mathbb{R}$ et donner son expression.

(6) On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) - y(t) - 1 \\ \dot{y}(t) = x(t) + x(t)y(t), \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{PC3}$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Ecrire (CP3) comme un problème de Cauchy standard (forme vue au cours)

$$w(t_0) = w_0, \quad \dot{w}(t) = f(t, w(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{Eq}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur à précisé.

(7) Montrer que (Eq) admet une solution maximale unique $w :]\tau_*, \tau^*[\to \mathbb{R}^2$.

(8) On considère le cas particulier $x_0 = 0$ et $y_0 = -1$. Montrer que la solution maximale de (PC3) est une fonction constante (sur $\mathbb{R}$) à déterminer.

(9) On suppose que $(x_0, y_0) \neq (0, -1,)$ on choisit $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ tel que $\theta_0 = x_0$ et $\sin\theta_0 = y_0$. Soit

$$\theta(t) = 2\arctan(t + C) + \frac{\pi}{2},$$

où C est une consatnte de sorte que

$$2\arctan(t_0 + C) + \frac{\pi}{2} = \theta_0.$$

Montrer que

$$t \in \mathbb{R} \mapsto w(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)),$$

est solution de (PC3).

Démonstration. **(1)** On pose $g(t,x) = \sin(x) + 1$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cette fonction est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc le prolème de Cauchy associé admet une solution maximale $u : J :=]T_*, T^*[\to \mathbb{R}$.
(2) Pour tout $t \in J$, $-1 \leq \sin(u(t))$, donc on a $u(t) = 1 + \sin(u(t)) \geq 0$, par suite u est croissante sur J. D'autre part, remarquons que $1 + \sin u(0) = 1 > 0$, donc par continuité il existe $\bar{t} > 0$ tel que $1 + \sin u(t) > 0$ pout tout $t \in J_1 = [0, \bar{t}]$. Comme u est croissante et que $\sin u(t) > -1$ sur J_1, alors forcément on a $u(t) \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$ sur J_1.
(3) Comme $1 + \sin u(t) \neq 0$ sur J_1, alors pour tout $t \in J_1$ on a

$$\int_0^t \frac{\dot{u}(s)}{1 + \sin u(s)} ds = t.$$

Un changement de variable donne

$$t = \int_0^{u(t)} \frac{dx}{1 + \sin(x)} = \int_0^{u(t)} \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

En déduit alors que

$$\tan\left(\frac{u(t)}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = t - 1.$$

Mais

$$\frac{u(t)}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

on a alors

$$u(t) = 2\arctan(t-1) + \frac{\pi}{2}, \qquad t \in J_1.$$

(4) Si on définit $\varphi(t) = 2\arctan(t-1) + \frac{\pi}{2}$ pout tout $t \in \mathbb{R}$, alors $(\mathbb{R}, \varphi)$ est une solution de (PC1). Donc par unicité on a $u = \varphi$, est donc u est une solution (globale) défini sur $\mathbb{R}$.
(5) C'est la même technique, juste il faut ajuster la constante C de sorte que

$$2\arctan(t-1) + \frac{\pi}{2} = \theta_0.$$

(6) et **(7)** On définit une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(t,x) = (x^2 - y - 1, x + xy), \qquad \forall (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Donc si on pose $w(t) = (x(t), y(t))$, alors le probème de Cauchy (PC3) s'écrit $w(t_0) = w_0$ et $\dot{w}(t) = f(t, w(t))$. Il est claire que f est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^3$, donc le problème de Cauchy admet une solution maximale unique $w :]\tau_*, \tau^*[\to \mathbb{R}^2$.
(8) Soit la fonction contante $w(t) = (0, -1)$, alors il est claire que satisfait le problème de Cauchy, donc par unicité c'est la solution maximale qui est donc elle est globale.

(9) Soit $(x_0, y_0) \neq (0,1)$, on choisit $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\cos\theta_0 = x_0$ et $\sin\theta_0 = y_0$. Donc on a $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Il est simple de vérifier que $t \mapsto \theta(t)$ est solution de (PC2). Donc on a

$$\theta(t) = \theta_0, \qquad \theta'(t) = 1 + \sin\theta(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si on pose $w(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ alors un calcul direct (il faut juste dérivé et comparé avec (PC3)) montre que w est solution de (PC3). $\square$

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Filière SMA6

Université Ibn Zohr, Agadir
A.U. 2019/2020
Prof. Said Hadd

Équations différentielles (SMA6) : Problème supplémentaire I

1. Un résultat de perturbation

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre d. On note par $\sigma(A)$ le spéctre de la matrice A, ensembles des valeurs propres de A. On note par $\mathbb{C}^-$ le plans complexe gauche qui ne contient pas 0. Soit $v \in \mathbb{R}^d$ un vecteur et $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ une fonction de continue telle que $g(t, 0) = 0$ et for tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+\mathbb{R}^d$ il existe $r > 0$ et $\alpha > 0$ tel que

$$\|g(t,x) - g(t,y)\| \le C\|x - y\|, \qquad \forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \quad x, y \in B(x_0, r).$$

De plus on suppose que

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-, \quad \|g(t,x)\| \le \psi(t)$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, avec $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et

$$\int_0^{+\infty} \psi(s)ds < +\infty.$$

Soit le problème de Cauchy suivant

$$(PC) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = (A + B)u(t) + \langle Pu(t), v\rangle g(t, u(t)), \quad t \ge 0, \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

(1) Montrer que le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique
(2) Donner l'expression de la solution de (PC) en fonction de e^{tA}.
(3) est ce que la solution maximale est globale ? justifier votre réponse.
(4) Etudier la stability du point d'équilibre 0 associé au problème de Cauchy (PC).

Démonstration. (1) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$f(t, x) = (A + B)x + \langle Ax, v\rangle g(t, x), \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d.$$

Cette fontion est continue et le problème de Cauchy (PC) s'écrit

$$\dot{(u)}(t) = f(t, u(t)), \quad t \ge 0, \quad u(0) = x_0.$$

Pour que le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique il suffit de montrer que f est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. En effet, soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et $t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \quad x, yB(x_0, r)$. On a

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le \|A + B\|\|x - y\| + \|\langle Px, v\rangle g(t,x) - \langle Py, v\rangle g(t,y)\|.$$

D'autre part,

$$\|\langle Px, v\rangle g(t,x) - \langle Py, v\rangle g(t,y)\| \le \|\langle Px, v\rangle(g(t,x) - g(t,y)\| + \|(\langle Px, v\rangle - \langle Py, v\rangle)g(t,y)\|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$\begin{aligned}\|\langle Px, v\rangle(g(t,x) - g(t,y)\| &\leq C\|P\|\|x\|\|v\|\|x-y\| \\ &\leq C\|v\|\|P\|(\|x-x_0\| + \|x_0\|)\|x-y\| \\ &\leq \gamma\|x-y\|\end{aligned}$$

avec $\gamma := C'\|v\|\|P\|(r + \|x_0\|)$. De plus on a

$$\begin{aligned}\|(\langle Px, v\rangle - \langle Py, v\rangle)g(t,y)\| &\leq \|P\|\|v\|\psi(t)\|\psi(t)\|\|x-y\| \\ &\leq \|P\|\|v\|\kappa_{t_0}\|x-y\|,\end{aligned}$$

avec $\kappa_{t_0} = \sup\{\psi(t) : t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\}$.
En combinant toutes ces inégalité, on voit que f est localement Lipschitzienne, et donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale

$$u : [0, T^*[\to \mathbb{R}^d.$$

(2) Comme u est solution, alors elle est dérivable sur $[0, T^*[$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(e^{-sA}u(s)\right) &= e^{-sA}\dot{u}(s) - Ae^{-sA}u(s) \\ &= (e^{-sA}(Au(s) + Bu(s) + \langle Pu(s), v\rangle g(s, u(s))) - Ae^{-sA}u(s) \\ &= e^{-sA}(Bu(s) + \langle Pu(s), v\rangle g(s, u(s))).\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t pour tout $t \in [0, T^*[$ on trouve

$$e^{-tA}u(t) - x_0 = \int_0^t e^{-sA}(Bu(s) + \langle Pu(s), v\rangle g(s, u(s)))ds.$$

En multipliant les deux cotés par e^{tA} on obtient

$$u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(Bu(s) + \langle Pu(s), v\rangle g(s, u(s)))ds, \quad t \in [0, T^*[.$$

(3) Soit K un compact de $\mathbb{R}^+$ et on note

$$\|\psi\|_{\infty,K} := \sup_{\sigma \in K} \psi(\sigma).$$

Pour tout $(t, x) \in K \times \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned}\|f(t,x)\| &\leq \|A + B\|\|x\| + \|P\|\|v\|\|x\|\psi(t) \\ &\leq \beta\|x\|\end{aligned}$$

avec

$$\beta := \|A + B\| + \|P\|\|v\|\|\psi\|_{\infty,K}.$$

D'apèrs un corollaire du théorème d'explosion (voir le cours sur Moodle et dans votre cahier), la solution est globale, et donc $T^* = +\infty$.

(4) Comme $g(t,0)=0$, alors $f(t,0)=0$, et donc 0 est un point d'équilibre de f. D'autre par, comme $\sigma(A)\subset\mathbb{C}^-$, alors

$$\sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda\in\sigma(A)\}<0.$$

Donc, d'après le premier théorème de Lyapunov, ils existent des constantes $M>0$ et $\omega>0$ tels que

$$\|e^{tA}\|\leq Me^{-\omega t},\quad \forall t\geq 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|u(t)\| &\leq Me^{-\omega t}\|x_0\|+Me^{-\omega t}\int_0^t e^{s\omega}\|P\|\|v\|\|u(s)\|\psi(s)ds\\ &\leq Me^{-\omega t}\|x_0\|+M\|P\|\|v\|e^{-\omega t}\int_0^t \psi(s)\left(e^{s\omega}\|u(s)\|\right)ds.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$e^{\omega t}\|u(t)\|\leq M\|x_0\|+M\|P\|\|v\|\int_0^t\psi(s)\left(e^{s\omega}\|u(s)\|\right)ds.$$

Maintenant, le lemme de Gronwall implique que

$$e^{\omega t}\|u(t)\|\leq M\|x_0\|\exp\left(M\|P\|\|v\|\int_0^t\psi(s)de\right).$$

Ainsi

$$\|u(t)\|\leq \tilde{M}e^{-\omega t}\|x_0\|,\qquad \forall t\geq 0,$$

avec

$$\tilde{M}:=M\exp\left(M\|P\|\|v\|\int_0^{+\infty}\psi(s)de\right).$$

$\square$